

УДК 551.326

## ЭВОЛЮЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЛЩИН ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ЯПОНСКОГО МОРЯ

© 2006 г. А. Н. Четырбецкий

Дальневосточный геологический институт ДВО РАН  
690022, Владивосток, просп. 100-летия Владивостоку, 159  
E-mail: chetyrbotsky@fegi.ru

Поступила в редакцию 26.11.2004 г., после доработки 29.08.2005 г.

В работе предлагаются простые математические модели термической динамики толщины покрова и термической динамики площади отдельной льдины. В уравнениях моделей явно учитывается пространственная ограниченность вмещающей покровов морской среды. На основании газодинамического подхода формулируется кинетическая модель эволюции распределения площадей и толщин льда. Интегрирование уравнений этой модели по площадям отдельных льдин характеризует распределение площадей покрова по толщине. Выполнено аналитическое исследование частных случаев. Рассмотрены вопросы оценки адекватности модели. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Морской ледяной покров представляет собой многокомпонентную динамическую систему, где внешнее воздействие определяется температурой воздуха, а также воздействием ветра и морскими течениями. В моделях эволюции системы ее объектами являются, как правило, многолетние покровы морей Арктического бассейна [1–5]. Адаптация этих моделей для покрова морей сезонного присутствия льда сопряжена с рядом трудностей принципиального характера. Так, отличия объектов приводят к тому, что в рамках моделей отсутствует рассмотрение эволюции покрова от момента начального формирования и до момента его конечного разрушения. Актуальность подобного изучения покрова Японского моря обусловлена потребностью составления научно-обоснованного прогноза его состояния для обеспечения безопасности жизнедеятельности населения в прибрежных районах и безопасности мореплавания, комплекса работ по освоению выявленных на шельфе моря месторождений нефти и газа, промысловых работ освоения биоресурсов и т.д.

Особенностью настоящего рассмотрения эволюции покрова является явный учет в уравнениях модели пространственной ограниченности вмещающей покровов морской среды и присутствие в системе ряда лимитирующих ее эволюцию факторов. На основании этих положений формулируются модели термической эволюции толщины и площади отдельной льдины. Далее формулируется пространственно-временная модель распределения толщин льда. Параметрическая идентификация моделей и оценка их адекватности выполнена на основании статистических выборок, предо-

ставленных проф. В.В. Плотниковым и проф. В.П. Тунеголовцом.

### 2. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Используемые здесь исходные данные характеризуют декадные состояния покрова за период 1961–1989 г. в отдельных районах акватории моря, где каждый из них является достаточно однородным по своим ледовым условиям. В северной части моря было выделено 114 таких районов. Акватория моря была покрыта прямоугольной сеткой, размер элементарной ячейки которой 60 км × 58 км определяется размером района открытой части моря (в прибрежных районах часть площади занята сушей). Для отдельного года наблюдений состояние ледяного покрова представлено выборками декадных распределений сплошности, толщин покрова, преобладающего размера льдин и характеристикой возраста торосов. Формирование выборок выполнялось на основании карт ледовых авиаразведок, массивов данных прибрежных гидрометеорологических станций и постов. Использовалась также дополнительная информация (радиолокационные и вертолетные наблюдения за льдом, попутные судовые наблюдения и т.д.). Эти фрагменты карт ледовой обстановки использовались для построения средних декадных карт для каждой декады в отдельном районе. По таким картам оценивались усредненные значения ледовых характеристик и далее они предписывались центру района [6].

Температурный и ветровой режимы воздуха в центрах районов задаются их временными распределениями с шагом одни сутки на стандартных

надледных горизонтах (2-х метровый горизонт для температуры и 10-ти метровый горизонт для скорости ветры). Период наблюдений – с 1960 по 2001 г. Результаты статистического анализа усредненных за весь период указанных наблюдений показывают, что для ледового режима Японского моря имеет место статистическое совпадение декадных температур воздуха при начальном формировании покрова и при его начальном таянии. Так, средняя температура воздуха за предшествующую декаду первичного присутствия льда равна  $T_0 = -(8.4 \pm 4.2)^\circ\text{C}$ , а в момент первичного разрушения сплоченности (переход через максимум ее значений) –  $T_{S1} = -(9.1 \pm 4.7)^\circ\text{C}$ . Если за момент начального таяния принять декаду перехода через максимум толщины покрова, то  $T_{h1} = -(7.8 \pm 4.3)^\circ\text{C}$  (для различия величин им приписан соответствующий индекс). Согласно критерию Стьюдента, между этими величинами отсутствуют статистически значимые отличия.

### 3. ТЕРМИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ТОЛЩИНЫ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

Изменение толщины покрова определяется потоками тепла к верхней и нижней поверхностям толщи. Уравнение теплового баланса может быть записано в виде

$$\rho\lambda\dot{h}_\Phi = q_I - q_{Wl}, \quad (1)$$

где  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $h$  – плотность льда, его скрытая теплота плавления и толщина;  $\dot{h} = dh/dt$ ;  $q_I$  – поток тепла через единичную площадку нижней поверхности толщи к единичной площадке ее верхней поверхности;  $q_{Wl}$  – поток тепла из воды к единичной площадке нижней поверхности. Поскольку для покрова Японского моря заметных механических изменений  $h$  не происходит [7], то в дальнейшем нижний индекс у  $\dot{h}$  опускается.

Если в (1) полагается линейность вертикального профиля температуры в толще льда  $q_I = k(T_m - T)/h$ ,  $q_{Wl} = 0$  и полагается совпадение температуры снега и воздуха, то

$$h(t) = \mu \left[ \int_{t_0}^t (T_m - T) dt \right]^{1/2}, \quad (2)$$

где  $\mu \equiv (2k/\rho\lambda)^{1/2}$ ;  $k$  – коэффициент теплопроводности льда;  $T_m$  – температура нижней поверхности льда (следуя [8],  $T_m = -1.8^\circ\text{C}$ );  $T$  – температура воздуха;  $t_0$  – момент начального присутствия льда [9]. Согласно (2), на конечной стадии зрелого состояния покрова  $T_m - T \geq 0$  и поэтому отсутствует стабилизация толщины. Для покрова Арктических морей это может привести к завышению расчетной толщины.

На этапе формирования – зрелое состояние покрова рост толщины льда и снега приводит к снижению величины  $q_I$  и повышению  $q_{Wl}$  главным образом в результате миграции изо льда в воду рассола (жидкой фазы с высокой концентрацией солей). Действительно, миграция рассола приводит к осолонению и, стало быть, повышению плотности подледных вод. Это является причиной конвективного перемешивания вод: на смену уже охлажденным и более соленым водам поднимаются более теплые глубинные воды, увеличивающие поток тепла к нижней поверхности льда. Когда  $q_I$  выходит на уровень  $q_{Wl}$ , происходит стабилизация толщины покрова.

Рассмотренные факты указывают, что  $q_I - q_{Wl}$  определяется температурой воздуха, текущей толщиной покрова  $h$  и максимально возможной для конкретного района акватории толщиной льда  $H^*$  (для мелководных водоемов она равна его глубине, а в других случаях – максимальное наблюдаемое значение за многолетний период). Понятно, что при отсутствии льда  $q_I = q_{Wl}$ . На этапе первичного формирования покрова, когда  $h$  мало,  $q_I - q_{Wl}$  является неотрицательной функцией  $h$ . В зрелом состоянии, когда весь ресурс  $H^* - h$  уже “израсходован”,  $q_I = q_{Wl}$ . Согласно сказанному и принятым в системе “ресурс–потребитель” положениям [10–12], аппроксимация  $\dot{h}$  на этапе формирования покрова может быть записана в виде

$$\dot{h} = f_h(T)(H^* - h)h, \quad (3)$$

где  $f_h(T) \geq 0$  является относительным изменением  $h$  за единицу времени, которое соотнесено к единице доступного для льда ресурса морской воды [13, 14]. На этапе таяния покрова ресурс и его “потребитель” меняются своими местами, если при формировании покрова ресурсом для льда является слой верхнего квазиоднородного слоя (ВКС), то при таянии уже лед выступает в качестве ресурса морской воды. Тогда  $\dot{h}_w = \psi_h(T)(H^* - h_w)h_w$ , где  $h_w$  – толщина слоя воды в верхней толще  $H^*$  моря;  $\psi_h(T)$  – относительное изменение  $h_w$  за единицу времени, которое соотнесено к единице доступного для воды ее ресурса льда. После подстановки  $h_w \equiv H^* - h$  в уравнение для  $\dot{h}_w$ , снова формально приходим к (3). Но в этом случае  $f_h(T) \leq 0$ .

При заданных динамических переменных воздействия внешней среды (толщина снега, альbedo поверхности снега и т.д.) аппроксимацией  $f_h$  может служить линейная функция этих переменных. Для оценки соответствующих коэффициентов следует использовать достаточно подробные многолетние ряды наблюдений. Однако для покрова Японского моря подобные наблюдения имеют фрагментарный характер. Поэтому здесь и везде далее рассматривается частный случай,

когда внешнее воздействие на толщину покрова определяется температурой воздуха при фиксированных значениях остальных динамических переменных. Если принимается допущение о совпадении температур воздуха при начальном формировании покрова и при его начальном разрушении, то аппроксимация  $\dot{h}$  может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \dot{h}(t, T^*) = & (T^* - T)[\alpha_h \Theta(T^* - T) + \\ & + \alpha'_h \Theta(T^* - T)](H^* - h)h, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $T^*$  – температура воздуха при начальном формировании покрова;  $\Theta(z)$  – функция Хевисайда, равная 1 при  $z > 0$ , в ином случае – 0;  $\alpha_h$ ,  $\alpha'_h$  неотрицательные коэффициенты пропорциональности. Временной шаг в рассматриваемых моделях определяется заданной временной дискретностью распределений температуры воздуха (одни сутки). Их размерность –  $(\text{м} \times {}^\circ\text{C} \times \text{сутки})^{-1}$ , т.е. их численное значение определяет соотнесенное к единице доступного ресурса толщины суточное относительное изменение толщины покрова при изменении температуры воздуха на  $1^\circ\text{C}$ . Перемена знака правой части (4) происходит тогда, когда температура воздуха превышает  $T^*$ . Значение  $T^*$  характеризует здесь определенное сочетание внешних условий, при которых начинается первичное ледообразование и первичное таяние льда. Очевидно отличие  $T^*$  от температуры начального формирования припая и его таяния  $T_F^*$ . Действительно, в прибрежных районах воды участков расположения припая являются относительно неглубокими и более пресными вследствие опреснения их речными водами и стоками промышленных предприятий. И поэтому ледообразование в открытых участках моря начинается при более низких температурах атмосферы, чем в участках расположения припая. Таяние льда на открытых участках начинается при более низких температурах – в этот период активно проявляется сочетание воздействия солнечной радиации и теплых течений моря [15].

Сопоставление моделей (2) и (4) наглядно выполнить для  $T = \text{const}$ . Если  $T < (aT^* - T_m)/(a - 1)$ , где  $a = (4/27)H^{*3}\alpha_h/\mu$ , то на фазовой плоскости  $\{h, \dot{h}\}$  соответствующие (2) и (4) фазовые траектории пересекаются в двух точках (значение толщины в этих точках обозначим  $h_A$  и  $h_B$ ,  $h_A < h_B$ ). Из их пересечения следует, что  $(\alpha_h/\mu)(H^* - h)h^2 = (T_m - T)/(T^* - T)$ . Неравенство для  $T$  вытекает из того, что максимум  $(\alpha_h/\mu)(H^* - h)h^2$  достигается при  $h = (2/3)H^*$ . Понятно, что  $0 < h_A < (2/3)H^*$  и  $(2/3)H^* < h_B < H^*$ . Если  $t_A$  и  $t_B$  – соответствующие  $h_A$  и  $h_B$  моменты времени, то при  $t \in [t_A, t_B]$  толщины по (4) превосходят толщины по (2). В остальных случаях имеет место обратная ситуация.

Решение (4) для этапа формирования покрова определяется выражением

$$h(t, T^*) = h_0 \times \frac{H^* \exp[\alpha_h H^*(T^* - \bar{T})(t - t_0)]}{H^* - h_0 + h_0 \exp[\alpha_h H^*(T^* - \bar{T})(t - t_0)]} - h_0,$$

где  $\bar{T} = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t T dt$  – текущая средняя температура воздуха;  $h_0 > 0$  – толщина начальных образований льда (первичных льдин);  $t_0 = t_0(x, y)$  – момент начального формирования (функция географических координат). Для этапа таяния следует выполнить замену  $\alpha_h \rightarrow \alpha'_h$ . Присутствие интеграла от температуры допускает простую интерпретацию: этот член отражает инерцию системы в ответ на термическое воздействие воздуха. Точка перегиба  $h(t)$  отсутствует при  $-\dot{T}(t_C^{(h)})/[T^* - T(t_C^{(h)})]^2 > \alpha_h H^*/2$ , что соответствует быстрому нарастанию толщины покрова. В ином случае  $h(t)$  в момент  $t = t_C^{(h)}$  имеет точку перегиба

$$h(t_C^{(h)}, T^*) = \{H^* - \alpha_h^{-1} \dot{T}(t_C^{(h)})/[T^* - T(t_C^{(h)})]\}^2/2.$$

Тогда существует определенный “инкубационный период”  $t_C^{(h)}$ , в течение которого понижение  $T$  приводит к формированию покрова тонкого льда. В реальных условиях наличие этого периода обусловлено следующим: на предварительном этапе эволюции покрова образуются отдельные скопления зародышей льда; происходит их агрегация и слипание; акватория района покрывается тонкой пленкой льда, и ее толщина практически не изменяется; а далее следует ускоренный рост толщины до ее предельного значения.

#### 4. КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ ПЛОЩАДЕЙ И ТОЛЩИН ЛЬДА

При построении модели принимаются следующие допущения: 1) в зависимости от  $T$  за единицу времени образуются (выбывают) льдины с толщиной  $h_0$ ; 2) имеет место диффузионное выравнивание толщин; 3) в прибрежных районах при формировании покрова часть льдин открытой части переходит в льды припая, а при таянии имеет место обратная ситуация; 4) при столкновениях льдин потерями их площадей можно пренебречь. Выполнение первых трех допущений обусловлено естественным изменением температуры, выбором величины временного шага и наличием трения на нижней поверхности покрова. Выполнение четвертого допущения обусловлено результатами статистического анализа линейных размеров отдельных льдин [7, 13]. Согласно ему,

площадь льдины  $a$  есть аддитивная переменная системы: при столкновениях льдин образуется льдина суммарной площади.

При указанных допущениях эволюция плотности распределения числа льдин  $n = n(x_1, x_2, t, a, h)$  в открытой части районов определяется балансовым соотношением

$$\begin{aligned} \partial n / \partial t + \partial(u_i n) / \partial x_i + \partial(\dot{h}n) / \partial h + \partial(\dot{a}n) / \partial a &= \\ &= f_{ah} + D \partial^2 n / \partial h^2 + \Phi + S + R, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $u = (u_1, u_2)$  – скорость дрейфа льда;  $x = (x_1, x_2)$  – пространственные координаты;  $\dot{a} \equiv da/dt$  – скорость термического роста площади отдельной льдины;  $f_{ah} \equiv f(a, h_0, T)$  – скорость образования (выбивания) льдин толщины  $h_0$  и площади  $a$ ;  $D$  – коэффициент диффузии (для простоты изложения принимается const);  $\Phi_n = \Phi_n(T, n)$  – характеризует зависимость  $n$  от площадей припая ( $\Phi_n \geq 0$  только в прибрежных районах);  $S = S(x_1, x_2, a, h, T)$ ,  $R = R(x_1, x_2, a, h, T)$  – характеризуют динамику агрегации и дробления льдин за единицу времени.

В практике исследований морского льда скорость его дрейфа рассчитывается на основании скорости ветра [1, 4, 16].

Модель для  $\dot{a}$  строится на основании таких же допущений, что принимаются для модели  $\dot{h}$ . Текущим ресурсом  $a$  является площадь воды на акватории района  $A_W = A^* - A_1$ , где  $A^*$  – площадь района;  $A_I \equiv \int_0^{h^*} \int_0^{A^*} a n d a d h + A_I^{(F)}$  – площадь льда;  $A_I^{(F)}$  – общая площадь припая. Для этапа таяния также следует учитывать площадь открытой воды: вследствие малой отражательной способности воды аккумулирует больше, чем покров льда лучистой энергии. Определенная ее часть расходуется на таяние и термическое разрушение льда. Уравнение для  $\dot{a}$  может быть записано в виде

$$\dot{a} = [\alpha_a \Theta(T^* - T) + \alpha'_a \Theta(T^* - T)](T^* - T) \times (A^* - A_I) a, \quad (6)$$

где  $\alpha_a, \alpha'_a$  – неотрицательные коэффициенты пропорциональности.

Представляется естественным определить  $f_{ah}$  посредством быстро убывающей по  $a$  функции. Например, гиперболы  $C_f(T, h)(a_0 + a)^{-k}$ , где первый сомножитель отличен от нуля только при  $h = h_0$ ;  $a_0$  – наименьшая площадь отдельной льдины;  $k > 2$ . Функция  $C_f(T, h)$  определяется из условия:  $I = \int_0^{h^*} \int_0^{A^*} f_{ah} d a d h$  есть число образованных при формировании покрова льдин, а при таянии – число растворивших льдин. В первом случае разумно полагать пропорциональность  $I$  доступному для льда его ресурсу  $A^* - A_I$ , а во втором случае – те-

кущей площади тонкого льда  $A_0 \equiv A(t, a, h_0)$ . В обоих случаях интенсивность процессов определяется разностью  $T^* - T$ . Если полагается, что  $C_f \sim T^* - T$ , то  $I = (T^* - T)[C(A^* - A)\Theta(T^* - T) + C'A_0\Theta(T - T^*)]$ , где  $C$  и  $C'$  – неотрицательные коэффициенты пропорциональности. Поскольку  $a_0 \ll \ll A^*$ , то

$$\begin{aligned} C_f(T, h) &= (T^* - T)[C(A^* - A_f)\Theta(T^* - T) + \\ &+ C'A_0\Theta(T^* - T)](k - 1)a_0^{k-1}\delta_{h, h_0}, \end{aligned}$$

где  $\delta_{h, h_0}$  – символ Кронекера.

В настоящем рассмотрении принимается следующая форма записи  $\Phi_n$ :

$$\begin{aligned} \Phi_n(a, h) &= -b_{ah}(T^* - T)n(a, h)\Theta(T^* - T) + \\ &+ [b_{T,n}(T - T_B^*) - b_{h,n}h]A^{(B)}(h)\Theta(T - T_F^*), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $b_{ah}, b_{T,n}, b_{h,n}$  – неотрицательные коэффициенты пропорциональности;  $A^{(B)}(h)$  – площадь припая толщины  $h$ . Первое слагаемое правой части (7) характеризует трансформацию льдин открытых участков прибрежных районов во льды припая при формировании покрова, а второе слагаемое – трансформацию льдин припая в льдины открытых участков на этапе его таяния и термического разрушения. В этой записи учитывается тот факт, что интенсивность разрушения есть убывающая функция  $h$ .

Понижение температуры воздуха приводит к быстрому смерзанию малых форм льда. Поэтому агрегация существенна только для начального этапа формирования покрова, когда система льдин на акватории настолько разрежена, что можно рассматривать лишь их парные столкновения (столкновениями более высоких порядков можно пренебречь). Тогда для записи  $S = S(a, h)$  на этом этапе можно использовать соответствующее представление так называемого коагуляционного члена кинетического уравнения Смолуховского [17–19]. Здесь этот член принимает вид

$$\begin{aligned} S(a, h) &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega_{ah}} \beta(ah - a'h', a'h') n(a'', h'') \times \\ &\times n(a', h') da' dh' - n(a, h) \times \\ &\times \iint_{\Omega} \beta(ah, a'h') n(a', h') da' dh', \end{aligned}$$

где  $\Omega_{ah} = \{(a', h'): 0 < a' < a, 0 < h' \leq h\}$ ;  $\beta(z, y)$  – ядро кинетического уравнения, которое представляется собой симметричную функцию;  $a'' = a - a', h'' = (ah - a'h')/(a - a')$ . В записи  $S(a, h)$  учитывается тот факт, что обычно агрегирование формализуется в терминах масс. Предлагаемый механизм агрегации состоит в следующем: площадь результата агрегации равна сумме площадей льдин, а толщи-

на пересчитывается – сумма объемов исходных льдин делится на суммарную площадь.

При записи  $R$  полагаем, что фрагменты дробления льдины имеют толщину исходной льдины. Тогда модификация соответствующего члена кинетического уравнения Мелзака [19] принимает вид

$$R(a, h) = \int_a^{A^*} \gamma(a', a, h) n(a', h) da' - a^{-1} n(a, h) \times \\ \times \int_0^a \gamma(a, a', h) da',$$

где  $\gamma(a', a, h)$  – вероятность образования льдин площади  $a$  при дроблении льдины площади  $a' > a$ . Нормировка  $\gamma(a', a, h)$  выполняется таким образом, что интеграл  $P(a, h) = a^{-1} \int_0^a \gamma(a, a', h) da'$  равен вероятности распада льдины площади  $a$ .

Поскольку рассматривается полный цикл эволюции покрова, то начальное распределение полагается равным нулю. Граничные условия для (7) естественным образом следуют из (4) и (6): отсутствие соответствующих потоков на крайних границах градаций толщин и площадей льдин.

## 5. ЭВОЛЮЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЛЩИН ЛЬДА

Уравнение для распределения толщин льда  $A = A(x_1, x_2, t, h)$  с учетом (8) получается умножением (5) на  $a$  и интегрирования по этой переменной полученного результата:

$$\partial A / \partial t + \partial u_i A / \partial x_i + \partial h A / \partial h = (T^* - T) f_{Ah}(A) + \\ + D \partial^2 A / \partial h^2 + \varphi_A,$$

$$\partial A^{(F)} / \partial t + \partial h A^{(F)} / \partial h = (T_F^* - T) f_{Ah}(A^{(F)}) + \\ + D \partial^2 A^{(F)} / \partial h^2 - \varphi_A,$$

$$f_{Ah}(A) = (\alpha_a A + \alpha_{ah} \delta_{h, h_0}) (A^* - A_I) \Theta(T^* - T) + (8) \\ + [\alpha'_a (A^* - A_I) A + \alpha'_{ah} A_0 \delta_{h, h_0}] \Theta(T - T^*),$$

$$\varphi_A = -b_{ah} (T^* - T) A \Theta(T^* - T) + \\ + [b_T (T - T_F^*) - b_h h] A^{(F)} \Theta(T - T_F^*),$$

где  $A(t, h) = \int_0^{A^*} a n(a, h) da$ ,  $A^{(F)}(t, h) = \int_0^{H^*} (A + A^{(F)}) dh$ ,  $b_n = b_{h,n} A^{*2}/2$ ,  $b_T = b_{T,n} A^{*2}/2$ . При записи уравнения для эволюции  $A^{(F)}$  площадей припая различных толщин учитывается следующее. Формально припай может быть представлен плотностью распределения числа льдин  $n^{(F)}(x_1, x_2, t, a, h)$ , где число льдин каж-

дой градации  $(a, h)$  есть 0 или 1. Тогда (5) также определяет эволюцию  $n^{(F)}(x_1, x_2, t, a, h)$ , если в его левой части положить равным нулю второй член и положить  $S \equiv 0$  (отсутствие агрегации). При записи (8) учитывается также тот факт, что  $\int_0^{A^*} a S da = 0$  и  $\int_0^{A^*} a R da = 0$  – в рамках отдельной градации толщины перераспределение площадей льдин не изменяет их суммарную площадь.

Начальные и граничные условия для (11) принимают вид

$$A(x_1, x_2, t_0, h) = A^{(F)}(x_1, x_2, t_0, h) = 0 \quad (9) \\ \text{и } \partial A / \partial h \Big|_{h=h_0, H^*} = \partial h A^{(F)} / \partial h \Big|_{h=h_0, H^*} 0.$$

В настоящем рассмотрении временной шаг выбирается равным 1 суткам. Из наблюдений и анализа порядка членов соответствующих уравнений следует, что для этого временного шага скорость дрейфа ледяного покрова (а не отдельных льдин) имеет квазистационарный характер и определяется простыми соотношениями [1, 4, 16].

Когда припай на этапе формирования – зрелое состояние составляет основную часть образований льда, динамика его общей площади определяется выражением

$$A_I^{(F)}(t) = \alpha_{ah} h_0 A^* \times \\ \times \frac{\exp[(\alpha_a A^* + \alpha_{ah} h_0)(T_F^* - \bar{T})(t - t_0)] - 1}{\alpha_a A^* + \alpha_{ah} h_0 \exp[(\alpha_a A^* + \alpha_{ah} h_0)(T_F^* - \bar{T})(t - t_0)]},$$

где  $\bar{T} = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t T dt$  – текущая средняя температура воздуха. Характер изменения  $A_I^{(F)}$  подобен изменению  $h(t)$  из (4): наличие (отсутствие) точки перегиба также определяется темпом охлаждения воздуха. Точка перегиба  $A_I^{(F)}(t)$  отсутствует при  $-\dot{T}(t_C^{(A)})/[T_F^* - T(t_C^{(A)})]^2 > \alpha_a A^* + \alpha_{ah} h_0$ , что соответствует быстрому росту площади припая. В ином случае  $A_I^{(F)}(t)$  в момент  $t = t_C^{(A)}$  имеет точку перегиба

$$A_I^{(F)}(t_C^{(A)}) = \{(A^* - \alpha_a^{-1} \alpha_{ah} h_0) - \\ - \alpha_a^{-1} \dot{T}(t_C^{(A)})/[T_F^* - T(t_C^{(A)})]^2\}/2.$$

Когда припай на этапе формирования – зрелое состояние полностью занимает площадь района, эволюция его площадей различных толщин определяется выражениями

$$A^{(F)}(i, h) = (H^*/h)^2 \sum_{k=1}^K B_k [h/(H^* - h)]^{1+\lambda_k} \times \\ \times \exp[-\lambda_k \alpha_h H^*(T_F^* - \bar{T})t], \quad h < H^*, \\ A^{(F)}(t, H^*) = A^* - \int_{h_0}^{H^* - \Delta h} A^{(F)}(t, h) dh,$$

где  $K$  – число градаций толщин;  $\{\hat{A}_k\}$  подбираются по распределению площадей в момент  $t = t_f$ , когда площадь припая достигает площади района;  $\lambda_k > 0$  – безразмерный параметр разделения переменных;  $\bar{T} = \frac{1}{t_g - t_f} \int_{t_f}^{t_g} T dt$  – средняя температура воздуха за период  $t_f < t \leq t_g$ , где  $t_g$  – момент появления участков воды;  $\Delta h$  – шаг градации толщин. Для простоты в этих выражениях не учитываются процессы диффузационного перераспределения площадей льда по толщинам (диффузия не является определяющей, а просто сглаживает распределение). Согласно этим выражениям, понижение температуры приводит к уменьшению доли тонких льдов и росту доли толстых льдов. При таянии покрова имеет место обратная ситуация.

## 6. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для параметрической идентификации модели (8), (9) используется усредненная за период наблюдений выборка площадей льда различных толщин. Элемент  $A_{r, d, g}^{(D)}$  выборки определяет площадь  $g$ -й градации толщины льда в  $d$ -й декаде  $r$ -го района (имеется шесть неравномерных градаций толщин [6, 20]). Элементу  $A_{r, d, g}^{(D)}$  соответствует  $A_{r, d, g}^{(M)}(\Theta) = 0.1 \sum_{t=10d-9}^{10d} \sum_{j \in J(g)} [A(x_1, x_2, t, h_j, \Theta) + A^{(F)}(x_{1r}, x_{2r}, t, h_j, \Theta)]$  где набор параметров определяется  $\Theta = (\alpha_h, \alpha'_h, \alpha_a, \alpha'_a, \alpha_{ah}, \alpha'_{ah}, T_F^*, T^*, D, b_{ah}, b_T, b_h)$ ;  $J(g)$  – номера интервалов равномерного разбиения  $(0, H^*]$ , которые покрывают  $g$ -й интервал градации толщин.

Оценивание элементов  $\Theta$  выполняется на основании поиска минимума функционала

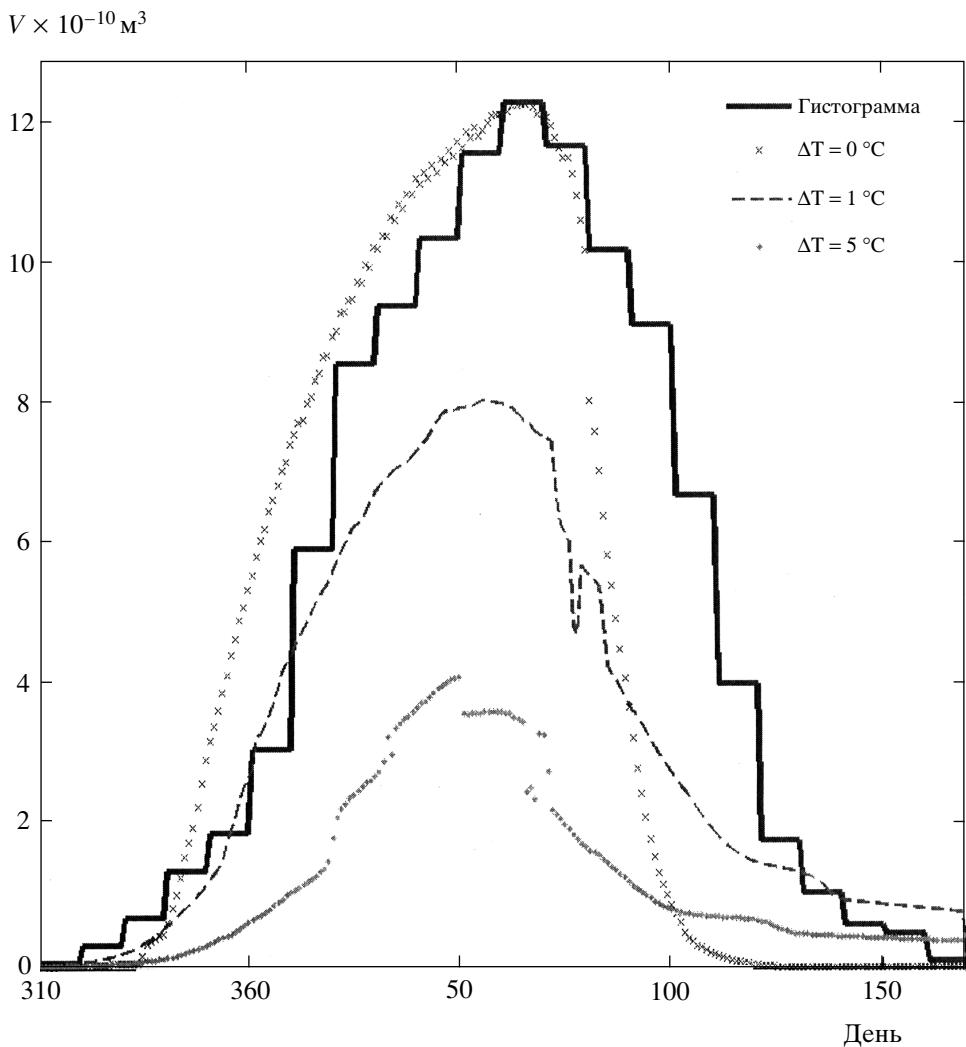
$$\Phi(\Theta) = e^T(\Theta)e(\Theta),$$

где  $e(\Theta)$  – вектор-столбец остатков,  $\mu$ -й элемент которого есть  $A_{r, d, g}^{(D)} - A_{r, d, g}^{(M)}(\Theta)$ ;  $\mu = 6 \{ \sum_{r'=1}^{r-1} [d_1(r') - d_0(r')] + d - d_0(r) + r - 1 \} + g$ ,  $\mu = 1-8022$ ;  $d_0(r)$  и  $d_1(r')$  – начальная и конечная декады эволюции в  $r$ -м районе;  $r = 1-114$  и  $g = 1-6$ . Для минимизации  $\Phi(\Theta)$  используется метод Гаусса [21]. Для аппрок-

симации градиента используются односторонние конечные разности с приращением аргумента  $\delta\theta_\alpha = 10^{-3}\theta_\alpha$  для  $\Phi(\theta)$ .

Вычисление начального приближения для решения задачи  $\min_{\theta} \Phi(\theta)$  выполняется следующим образом. Приближение для  $T^*$  полагается равным  $-8^{\circ}\text{C}$  (в северном полушарии ее изотерма для приводного воздуха совпадает с границей морских льдов [22]). Приближение для  $\alpha_h, \alpha'_h, \alpha_a, \alpha'_a, T_F^*, \alpha_{ah}, \alpha'_{ah}$  выполняется на основании выборки площадей различных толщин в тех прибрежных районах, где покров главным образом представлен льдами припая (на акватории Японского моря существует 14 таких районов). Для вычисления  $\alpha_h, T_F^*$  использовалось (4) и аппроксимации  $h_r(t) = \sum_{i=1}^{k_{r,h}} c_i^{(r,h)}(t - t_0^{(r)})^i$  гистограмм декадных толщин, где  $t_0^{(r)}$  – первые сутки наличия льда на акватории  $r$ -го района;  $k_{r,h}$  – степень полинома;  $t$  – текущие сутки года. Для каждого  $r$  решение задачи  $\min_{\left\{c_i^{(r,h)}\right\}} \sum_{d=d_0(r)}^{d_1(r)} [h_{d,r}^{(D)} - 0.1 \sum_{i=1}^{k_{r,h}} c_i^{(r,h)} \sum_{t=10d-9}^{10d} (t - t_0^{(r)})^i]^2$  выполняется методом наименьших квадратов ( $k_{r,h}$  подбирались в интерактивном режиме). Он также используется для решения задачи  $\min_{(\alpha_h, \beta_h)} \sum_{r \in R_F} \sum_{t=10d_0(r)-9}^{10d_1(r)} [\dot{h}_r / (H^* - h_r) h_r - \beta_h - \alpha_h T_r]^2$ , где  $R_F$  – номера районов;  $T_r = T_r(t)$  – температура надледного воздуха. Тогда  $\beta_h/\alpha_h$  есть оценка  $T_F^*$ . Оценивание  $\alpha_a$  и  $\alpha_{ah}$  выполняется подобным образом. Вместо (4) используется результат интегрирования по  $h$  второго уравнения (11). В этом случае  $\alpha_a, \alpha_{ah}$  есть решение задачи  $\min_{(\alpha_a, \alpha_{ah})} \sum_{r \in R_F} \sum_{t=10d_0(r)-9}^{10d_1(r)} [\dot{A}_r / A_r^* - A_r](T_F^* - T_r) - \alpha_a A_r - \alpha_{ah} h_0]^2$ , где  $A_r(t) = \sum_{i=1}^{k_{r,h}} c_i^{(r,A)}(t - t_0^{(r)})^i$  – площадь припая;  $A_r^*$  – площадь акватории  $r$ -го района. Набор  $\{c_i^{(r,A)}\}$  определяется МНК на основании выборки суммарных площадей припая за декаду. На этапе построения начального приближения полагается: оценка приближения для  $b_{ah}, b_T, b_h, D$  выполняется в интерактивном режиме.

Согласно вычислительных экспериментов оценки параметров определяются интервалами:  $\hat{T}_B^* = -(6.3 \pm 0.8)^{\circ}\text{C}$ ;  $\hat{T}^* = -(7.6 \pm 0.9)^{\circ}\text{C}$ ;  $\hat{\alpha}_h = (4.338 \pm 1.024) \times 10^{-4}$ ;  $\hat{\alpha}'_h = (7.877 \pm 0.965) \times 10^{-4}$ ;



**Рис. 1.** Временные изменения площади покрова и его средней толщины в заливе Петра Великого (а, б) и устье Татарского пролива (в, г) (ось абсцисс – текущие сутки года).

$\hat{\alpha}_a A^* = 92.482 \pm 0.471) \times 10^{-2}$ ;  $\hat{\alpha}'_a A^* = (2.580 \pm 0.586) \times 10^{-2}$ ;  $\hat{\alpha}_{ah} A^* = (4.843 \pm 0.962) \times 10^{-2}$ ;  $\hat{\alpha}'_{ah} A^* = (4.047 \pm 0.925) \times 10^{-2}$ ;  $\hat{D} = (2.216 \pm 0.721) \times 10^{-3}$ ;  $\hat{b}_{ah} = (6.931 \pm 1.096) \times 10^{-1}$ ;  $\hat{b}_T = (2.744 \pm 1.046) \times 10^{-1}$ ;  $\hat{b}_h = (6.186 \pm 2.349) \times 10^{-1}$ . Размерность  $\alpha_h$  и  $\alpha'_h$  –  $(\text{м} \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{сут})^{-1}$ ; оценки  $\alpha_a$ ,  $\alpha'_a$ ,  $\alpha_{ah}$ ,  $\alpha'_{ah}$  приводятся в масштабе площади открытого района и их размерность  $(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{сут})^{-1}$ ;  $D$  –  $\text{м}^2/\text{сут}$ ;  $b_{ah}$ ,  $b_T$  –  $(^\circ\text{C} \cdot \text{сут})^{-1}$ ;  $b_h$  –  $(\text{м} \cdot \text{сут})^{-1}$ . Согласно этим оценкам, измеряемая значением  $\alpha'_h$  мера интенсивности термического разрушения толщины почти в два раза выше мерды интенсивности его формирования. Данное положение соответствует принятым при построении (11) допущениям.

$$\sum_{r \in R_F} \sum_{d=d_0(r)}^{d_1(r)} [h_{d,r}^{(D)} \left[ \int_{10d_0(r)-9}^{10d} (T_m - T) \right]]^{1/2} /$$

$$\sum_{r \in R_F} \sum_{d=d_0(r)}^{d_1(r)} \left[ \int_{10d_0(r)-9}^{10d} (T_m - T) \right]^{1/2}$$

используется для оценки параметра  $\gamma_h$  модели (2). В настоящем случае  $\hat{\mu} = (0.033 \pm 0.014) \text{ м } (\text{°C})^{-1/2}$ .

На рис.1 представлены кривые временных изменений площади покрова и его средней толщины (площадь покрова нормирована на площадь района открытого моря  $A_S^*$ ) в двух контрастных районах моря. Случай (а) и (б) характеризуют ледовый режим залива Петра Великого, (в) и (г) – устья Татарского пролива. Анализ следования кривых показывает доста-

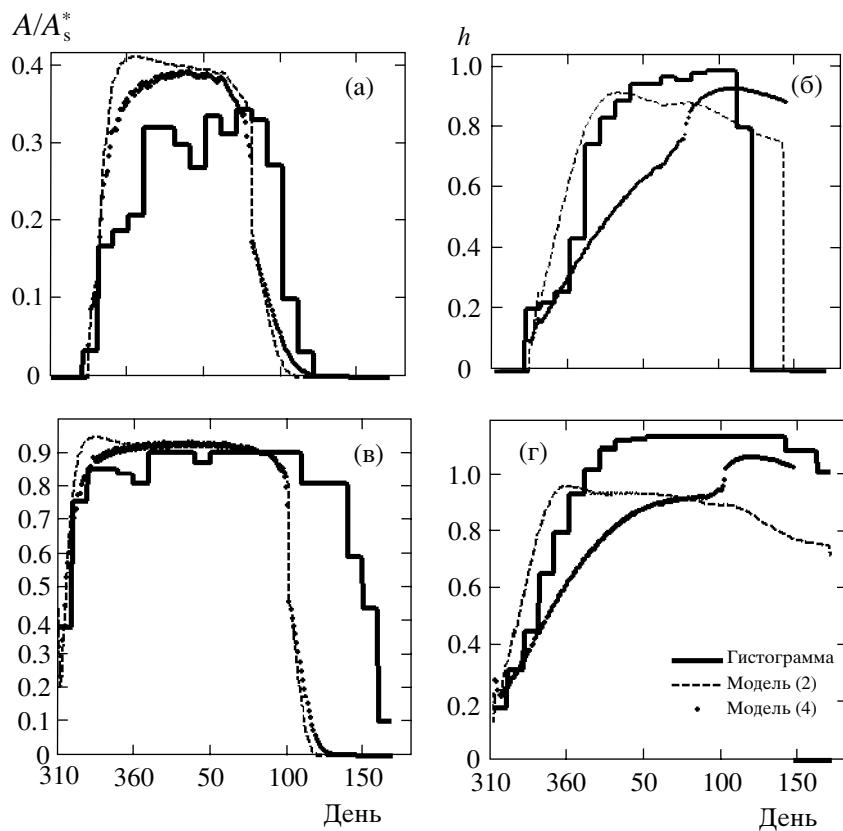


Рис. 2. Динамика объемов льда Японского моря при изменении температуры атмосферы.

точно высокую степень соответствия модели исходным данным, что непосредственно вытекает из анализа соответствующих корреляций (они могут выступать в качестве меры адекватности модели исходным данным [21]). Здесь их значения превышают 0.729.

На рис. 1 пунктирными линиями отмечены результаты моделирования, которые получаются при использовании (2) в качестве толщины покрова; помеченные символом точки линии соответствуют случаю задания  $h$  с помощью (4). Кривые для площадей льда практически совпадают. Сопоставление линий для толщин приводит к ранее полученным результатам сравнения этих представлений: на этапе формирования—зрелое состояние пунктирные линии в случаях (б) и (г) расположены выше линий, которые соответствуют (4). На заключительном этапе имеет место обратная ситуация. Необходимо отметить также тот наблюдаемый факт, что на заключительном этапе эволюции имеется временной отрезок, где при убывании площади покрова его средняя толщина является неубывающей функцией. Эта ситуация обусловлена тем, что относительная скорость убывания объема льда  $-\dot{V}_l/V_l$  не превосходит относительной ско-

рости убывания площади  $-\dot{A}_l/A_l$ . Поэтому за одну-две декады до окончательного момента разрушения покрова на акватории районов присутствуют образования льда с достаточно высокими толщинами и низкими площадями. Далее следует быстрое падение толщины до ее нулевого значения. Эта ситуация в большей степени соответствует изменению толщины по (4), чем по модели (2). Поэтому модель (2) целесообразно использовать для этапа формирования покрова, а (4) – для этапа его разрушения.

Модель (8), (9) может быть использована для проведения различного рода прогнозических экспериментов, в частности, экспериментов по оценке последствий возможных климатических изменений на ледяной покров Японского моря. Анализ данных измерений толщин льда с американских и английских подводных лодок в 29-ти точках Северного Ледовитого океана показал уменьшение средней толщины льда примерно на 43% за период с 1958 по 1997 г. [5, 11]. За этот период средняя толщина льда уменьшилась примерно с 3.5 до 2 м. Для ледяного покрова Японского моря подобные сведения отсутствуют. Интерес к данной проблеме очевиден по многим обстоятельствам. Прежде всего, для проведения экологических экспертиз требуются различного рода количественные оценки ан-

тропогенного воздействия промышленных и производственных предприятий на окружающую среду. Кроме того, эти прогнозы полезны для комплексной оценки возможного состояния климатической системы.

Расчеты выполнялись при том же самом ветровом режиме 2-х метрового надледного слоя воздуха, что и был использован для оценки адекватности модели. Температура атмосферы изменялась в сторону ее увеличения с шагом 0.5°C. Результаты расчетов в форме графиков изменения общих объемов льда приведены на рис. 2. Масштаб измерений объемов льда –  $10^{10} \text{ м}^3$ . Согласно этим результатам, при повышении температуры на 1°C общие потери объемов льда составляют  $1.695 \times 10^2 \text{ м}^3$  (19% современного уровня), а при повышении на 5°C –  $6.092 \times 10^{12} \text{ м}^3$  (69% современного уровня).

Для реального представления порядка этих чисел следует выразить их в площадях районов открытого моря. Тогда в первом случае суммарные потери составляют ледяной покровов почти 249 таких районов, толщины льда в которых равна 1 м; во втором случае эта цифра соответствует покрову с площадью 826 районов.

Понятно, что полученные результаты дают грубое представление о возможных последствиях климатических изменений. Ведь при глобальном потеплении увеличивается уровень осадков, следствием чего изменяется солевой режим моря. А стало быть, и условия и температура атмосферы, при которой первоначально формируется покров. Кроме того, возможны не учитываемые в модели обстоятельства. Однако даже и на данном уровне представлений может быть выполнена оценка этих последствий.

## 7. ВЫВОДЫ

Выполненное исследование позволяет сделать следующие выводы.

1. Для формализации термической эволюции покрова Японского моря могут быть использованы положения системы «ресурс–потребитель», где интенсивность взаимодействия характеризуется температурой воздуха. Указанные положения позволяют сформулировать модель термической эволюции толщины покрова и модель термической эволюции площади отдельной льдины. В рамках этих моделей могут быть объяснены наблюдаемые особенности эволюции морского льда. В частности, влияние темпа охлаждения воздуха на характер формирования покрова.

2. На основании газодинамического подхода выполнено построение модели эволюции площадей и толщин льда, которая далее используется для формализации модели эволюции распределения площадей льда различных толщин.

3. Разработана методика параметрической идентификации этой модели и выполнена оценка ее адекватности исходным данным.

4. Выполнена оценка последствий возможных климатических изменений на ледяной покров Японского моря.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Доронин Ю.П., Хейсин Д.Е. Морской лед. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 318 с.
2. Thorndike A.S. et al. The thickness distribution of sea ice // J. Geophys. Res. 1975. V. 80. № 33. P. 4501–4513.
3. Semtner A.J. A model for the thermodynamics growth of sea ice in numerical investigations of climate // J. Phys. Oceanogr, 1976. V. 6. P. 379–389.
4. Аппель И.Л., Гудкович З.М. Численное моделирование и прогноз эволюции ледяного покрова арктических морей в период таяния, СПб.: Гидрометеоиздат, 1992. 144 с.
5. Rothrock D.A., Yu Y., Maykut G.A. Thining of the sea-ice cover // Geoph. Res., Letters, 1999. V. 26. P. 3469–3472.
6. Плотников В.В. Изменчивость ледовых условий Дальневосточных морей России и их прогноз, Владивосток: Дальнавака, 2002. 172 с.
7. Четырбоцкий А.Н., Плотников В.В. Ледяной покров Японского моря: исходные данные и процедуры восстановления пропущенных значений // Электронный журнал “Исследовано в России”, 2003. № 7. С. 88–93. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/007.pdf>.
8. Перри А.Х., Уокер Дж.М. Система океан–атмосфера. Л.: Гидрометеоиздат, 1979. 195 с.
9. Эштон Дж. Д. Рост, движение и разрушение пресноводных льдов // Динамика масс снега и льда. Л.: Гидрометеоиздат. С. 266–305.
10. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. М.: Наука, 1984. 304 с.
11. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2002. 320 с.
12. Свирижев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987. 368 с.
13. Четырбоцкий А.Н. Локальная эволюция толщины ледяного покрова водных поверхностей // Тр. ТОВМИ им. адм. Макарова. 2001. Вып.23. Владивосток. С.117–123.
14. Chetyrbotsky A.N. Local evolution of thickness of an ice cover of water tables // The ACSYS Decade and Beyond. 11–14 November 2003. St. Peterburg. 2003. P. 160–161.
15. Якунин Л.П. Ледовые исследования на дальневосточных морях // Проблемы Арктики и Антарктики, 1979. Вып.77. С. 102–107.
16. Овсиенко С.Н. О численном моделировании дрейфа льда // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1976. Т. 12. № 11. С. 1201–120.

17. Седунов Ю.С. Физика образования жидкокапельной фазы в атмосфере. Л.: Гидрометеоиздат, 1972. 207 с.
18. Волоцук В.М., Седунов Ю.С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 320 с.
19. Волоцук В.М. Кинетическая теория коагуляции. Л.: Гидометеоиздат, 1984. 283 с.
20. Наставление по службе прогнозов. Раздел 3. Часть III. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 144 с.
21. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. М.: Статистика, 1979. 349 с.
22. Сергин В.Я., Сергин С.Я. Системный анализ проблемы больших колебаний климата и оледенения Земли. Л.: Гидрометеоиздат, 1978. 279 с.