

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
FAR EASTERN BRANCH

V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute

A.N. CHETYRBOTSKY, V.V. PLOTNIKOV

**ICE COVER OF JAPAN'S SEA:
THE ANALYSIS OF THE DATA AND MODELING**



Vladivostok
Dalnauka
2005

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ДАЛЬНЕВОСТОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева

А.Н. ЧЕТЫРБОЦКИЙ, В.В. ПЛОТНИКОВ

**ЛЕДЯНОЙ ПОКРОВ ЯПОНСКОГО МОРЯ:
АНАЛИЗ ДАННЫХ И МОДЕЛИРОВАНИЕ**



Владивосток
Дальнаука
2005

УДК 551.467.3 (265.54)

Четырбоцкий А.Н., Плотников В.В. Ледяной покров Японского моря: анализ данных и моделирование. – Владивосток: Дальнаука, 2005. 146 с. ISBN 5-8044-0596-9.

В монографии рассматривается эволюция ледяного покрова Японского моря. Приводятся результаты статистического анализа состояний ледяного покрова. На основании выявленных эмпирических закономерностей формулируется математическая модель исследуемого эволюционного процесса. Предлагаются алгоритмы реализации численной схемы и оценки адекватности моделей, а также прогноз состояния ледяного покрова Японского моря при возможном глобальном изменении климата.

Для специалистов в области гидрометеорологии, рыбного промысла, морского транспорта, гидротехнического строительства, математического моделирования, а также аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Ил. 23, табл. 4, библи. 132.

Ключевые слова: ледяной покров, эволюция, сплоченность, возраст, синергетика, прогноз.

Chetyrbotsky A.N., Plotnikov V.V. Ice cover of Japan's sea: the analysis of the data and modeling. – Vladivostok: Dalnauka, 2005. 146 p. ISBN 5-8044-0596-9.

In the monograph is considered evolution of a Japan's sea ice cover. Results of the statistical analysis of conditions of an ice cover are resulted. On the basis of the revealed empirical laws the mathematical model of researched evolutionary process is formulated. Algorithms of realization of the numerical circuit and an estimation of adequacy of models, and also the forecast of a condition of an ice cover of sea of Japan are offered at possible{probable} global change of a climate.

For experts in the field of hydrometeorology, fishing, sea transport, hydraulic engineering construction, mathematical modeling, and also post-graduate students and students of corresponding specialties.

Ill. 23, tabl. 4, bibl. 132.

Key words: an ice cover, evolution, unity, age, synergetic, the forecast.

Рецензент д. г. н., проф. *В.П. Тунеголовец*

Утверждено к печати Ученым советом ТОИ ДВО РАН

ISBN 5-8044-0596-9

© Четырбоцкий А.Н., Плотников В.В., 2005 г.

© Дальнаука, 2005 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Японское море представляет собой уникальную природную систему, поведение которой существенным образом влияет на экономику Дальнего Востока. Однако наличие сезонного ледяного покрова ограничивает эффективное освоение его биоресурсов, развитие транспортных коммуникаций, гидротехнического строительства, повышение защищенности государственных границ и т. д. Кроме того, решение задач долгосрочных гидрометеорологических прогнозов во многом зависит от знания ледовой обстановки и возможности ее прогнозирования. Последнее обусловлено тем обстоятельством, что ледяной покров, который является продуктом сложных механизмов взаимодействия атмосферы и океана, в свою очередь существенно влияет на формирование климата и погоды, термического режима вод, изменения течений и другие метеорологические процессы.

Следствием возрастающих требований, связанных с необходимостью более полного учета состояния льда в практических и исследовательских задачах, являются последовательное совершенствование существующих методов, расширение использования средств компьютерного моделирования, поиск новых форм и методов ледовых исследований и прогнозов.

В монографии рассматриваются современное состояние и эволюция ледяного покрова Японского моря. Выполнен анализ различных источников поступления различных типов ледовой информации. Приводятся результаты статистического анализа параметров ледяного покрова. На их основании формулируются положения гидродинамической модели эволюции ледяного покрова и прогноза его состояния. Приводятся численные схемы алгоритмов и оценки прогноза составляющих ледовых условий с различной заблаговременностью.

При исследовании ледяного покрова замерзающих морей имеет место парадоксальная ситуация. С одной стороны, повседневное наблюдение за ним в период осень–весна дает ясные представления о последовательности и специфических особенностях этапов его эволюции, а с другой – соответствующие математические модели имеют фрагментарный характер описания определенных качеств покрова. Например, для описания начального формирования и конечного разрушения используются разные типы моделей. При этом основные усилия ориентированы в сторону описания дрейфа льда и связанных с ним проблем. А решению вопросов описания начальной и конечной стадий эволюции, таяния льда не уделяется должного внимания. Аналогичная ситуация наблюдается и по отношению к припаю покрова. Не рассмотрены процессы самопроизвольного дробления покрова, при котором из исходной льдины образуется некоторое число ее прямых «потомков». Математическое описание непосредственно процесса дробления и дальнейшая динамика отдельных частей также являются важной задачей.

В монографии предпринята попытка устранения некоторых из отмеченных недостатков. Основное внимание уделяется построению моделей термической

эволюции покрова, главные положения которых формулируются на основании результатов статистического анализа многолетнего архива ледовой информации, термического и ветрового режимов надледного слоя воздуха.

Построение математических моделей выполнялось с единых позиций, когда рассматривался полный цикл эволюции покрова, начиная с момента образования зародышей льда и до его конечного присутствия на акватории моря.

Приводится методология параметрической идентификации разработанных моделей. Численные эксперименты показали высокую степень адекватности предлагаемых моделей их реальным природным прототипам.

Предлагаемая работа является обобщением многолетних исследований авторов в области изучения и прогнозирования ледовых условий замерзающих морей. Она показывает широкие возможности гидродинамических моделей для глубокого геофизического анализа реальных ледовых процессов на акватории дальневосточных морей.

Главы 1, 3 написаны А.Н. Четырбоцким, предисловие, главы 2, 4 и заключение – А.Н. Четырбоцким и В.В. Плотниковым.

Если чтение монографии хоть немного поможет специалистам разных профилей, работающим в различных областях исследования ледяного покрова, в решении стоящих перед ними проблем, то авторы будут считать, что они справились со своей задачей.

Во время работы над монографией мы широко пользовались советами наших коллег и друзей. Особенно мы благодарны за плодотворные дискуссии профессору, доктору географических наук В.П. Тунеголовцу, Е.Н. Четырбоцкому, В.И. Четырбоцкой и кандидату геолого-минералогических наук В.В. Наумовой. Мы также признательны сотрудникам лаборатории ледовых исследований ТОИ ДВО РАН за помощь в решении ряда технических задач при работе над монографией.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ФОРМИРОВАНИЯ, ДРЕЙФА
И РАЗРУШЕНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА
ЗАМЕРЗАЮЩИХ МОРЕЙ**

Ледяной покров замерзающих морей является результатом взаимодействия атмосферы и океана. Количественные соотношения для величин указанного воздействия, выраженные в той или математической форме, характеризуют его пространственно-временное состояние. В качестве основных параметров состояния покрова для конкретного района обычно выступают геометрические характеристики покрова – толщины отдельных ледяных образований и занимаемые ими площади. В практических исследованиях наиболее часто используются осредненная толщина и отношение общей площади льда к площади района акватории, или сплоченность льда [85]. Здесь каждый район представляет собой определенную элементарную ячейку сетки, с помощью которой осуществляется покрытие морской акватории. Обычно в этом качестве выступает прямоугольная ячейка. В рамках отдельного района принимается постоянство метеорологических и гидрологических наборов параметров. Выполнение этих условий обуславливает переход к непрерывным моделям динамики льда.

Поскольку использование долгосрочных прогнозов погоды в морях не приводит к приемлемым результатам, то различают краткосрочный, сезонный и долгосрочный типы математических моделей динамики этих величин. Первый из них предназначен для непосредственного прогноза ледовых явлений, и поэтому временной шаг для моделей этого типа ограничен временем монотонного изменения ледовой обстановки (от одних суток до месяца). Методы данного класса основываются на допущении о наличии запаздывания процессов в океане относительно полей метеорологических характеристик, а также на использовании предсказания погоды при составлении морских прогнозов [1]. К краткосрочным типам причисляют модели, где временной шаг может составлять несколько часов или быть меньше 1 суток. Долгосрочный тип модели предназначен для оценки влияния морских льдов на взаимодействие атмосферы и океана, и их временной шаг не меньше, по крайней мере, одного годового цикла. Эти случаи также не составляют предмета настоящего рассмотрения. В настоящей книге рассматриваются модели с суточно-временным шагом.

Дальнейшая классификация математических моделей обусловлена уровнем детализации ледовых явлений и способами их параметрической формализации, а также типом применяемого математического аппарата. Например, если рассматривается только изменение толщины или только ледовитости моря (отношение площади льда в море к общей его площади или рассматриваемой расчетной об-

ласти), то для оценки величины каждой из них в большинстве случаев используются эмпирические модели [31, 23, 1, 65]. В эмпирических моделях роста толщины покрова параметризация теплового баланса выполняется через температуру заранее фиксированного слоя воздуха. Простая реализация этого подхода состоит в принятии положений задачи Стефана [36, 44]. Допускаются также постоянство теплопроводности льда и равенство температур поверхности льда и воздуха.

При количественном описании крупномасштабных ледовых процессов существенно наличие взаимосвязи между геометрическими характеристиками покрова и непосредственным дрейфом льда. Действительно, эволюция покрова определяется либо процессом термического вертикального нарастания–стаивания льда, либо процессами его дрейфа. В частности, перераспределение льда на акватории моря, а следовательно, эволюция сплоченности определяется в том числе и дрейфом льда. В закрытых районах моря (например, Амурский и Уссурийские заливы) влияние дрейфа не столь значительное, а для припая районов он вообще отсутствует. Если же целью является использование достаточно универсальных моделей, то применение соответствующих уравнений переноса для описания эволюции ледяного покрова является предпочтительным.

1.1. ТЕРМИЧЕСКОЕ ФОРМИРОВАНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ ТОЛЩИНЫ ПОКРОВА

Формирование и разрушение ледяного покрова обусловлены тепловыми потоками к его верхней и нижней поверхностям. Поэтому скорость прироста толщины покрова определяется величиной вертикального потока тепла на нижней границе льда. Величина этого потока может быть найдена в результате расчета вертикального теплообмена между нижней границей льда и атмосферой через толщу льда [10]. Принимается, что теплота кристаллизации пропорциональна образующейся массе льда $\partial m / \partial t$, а поток тепла через лед пропорционален градиенту температуры $\partial T / \partial z$. Тогда, если Φ_w – тепловой поток из воды ко льду, то тепловой баланс толщи льда удовлетворяет балансовому соотношению:

$$L \frac{\partial m}{\partial t} = \lambda_l \frac{\partial T}{\partial z} - \Phi_w, \quad (1.1)$$

где L – скрытая теплота кристаллизации льда, λ_l – теплопроводность льда. Поскольку удельная теплота плавления морского льда зависит от его солености и температуры, то левая часть этого соотношения принимает вид $[L(1 - s/s_p) + \Theta(C_w \rho_w / \rho_l - C_l)] \rho_l \partial h / \partial t$ [23]. Здесь s, s_p – соленость морского льда и соленость рассола; C_w, C_l – теплоемкости морской воды и льда; ρ_w, ρ_l – плотности морской воды и льда. Первый член в квадратных скобках характери-

зует выделяющуюся при образовании единичного объема морского льда теплоту, а второй – теплоту за счет изменения объемной теплоемкости воды при температуре замерзания Θ [21–23, 29]. Если принять допущение о линейности градиента температуры во льду и ввести обозначение L' для выражения в квадратных скобках, то формальное решение (1.1) после соответствующих подстановок записывается в виде

$$h(t) = h_0 \left\{ 1 + 2 \int_0^t (L' \rho_l)^{-1} [\lambda(\Theta - T_0) - 2\Phi_w h] dt \right\}^{1/2}, \quad (1.2)$$

где $h_0 = h(0)$, T_0 – температура на верхней поверхности льда. Понятно, что оценка предельной толщины льда

$$h_c = \lambda_l \frac{\Theta - T_0}{\Phi_w}$$

следует из приравнивания правой части балансового соотношения (1.2) нулю. Случай присутствия снежного покрова, который является хорошим изолятором тепла, также описывается уравнением (1.1). Вследствие своих теплоизоляционных свойств снег является одним из главных факторов, влияющих на рост льда. При допущении о неизменности вертикальных профилей температур в снегу и льду вертикальный поток тепла в них не изменяется по толщине:

$$\lambda_l \frac{\Theta - T_0}{h} = \lambda_s \frac{T_0 - T_s}{h_s},$$

где h_s, λ_s, T_s – толщина, теплопроводность и поверхностная температура снега. Подстановка в (1.1) найденного из представленного соотношения значения T_0 позволяет оценить толщину покрова льда при наличии снега.

В реальных условиях представление (1.2) используется в значительно упрощенном виде. Например, полагается $\Phi_w = 0$, $L' \rho_l = \text{const}$ и T_0 равно температуре атмосферы. Тогда $h(t)$ удовлетворяет простому выражению. Возможны также и другие различные комбинации условий и допущений, при выполнении которых толщина покрова определяется простым аналитическим выражением.

Наличие границ области применимости (1.1) обусловлено следующими обстоятельствами. Во-первых, в этом представлении присутствует ряд физических величин, которые в реальных условиях определяются с большой погрешностью. Во-вторых, этап начального формирования покрова лежит вне рамок этой модели. На данный факт указывает присутствие множителя h_0 : при равенстве его нулю в начальный момент изменения толщины не происходит. В-третьих, здесь

присутствует набор констант, для численного определения которых следует выполнить ряд соответствующих натуральных экспериментов.

Другой способ оценки $h(t)$ состоит в использовании решения так называемой задачи Стефана [36, 44]. Под ней понимается класс задач о переносе, основанном на уравнении диффузии с подвижной или свободной границей. Интересно отметить, что сам Стефан изучал как раз утолщение льда в полярных морях [44]. Суть его рассуждений состоит в следующем. Теплота кристаллизации образующегося льда отводится через слой твердой фазы и отбирается холодным воздухом с температурой ниже температуры замерзания воды. С утолщением слоя льда темп отвода теплоты от фронта кристаллизации понижается. Поэтому уменьшается рост толщины покрова. Спецификой этой задачи является тот факт, что неизвестно зависящее от времени положение границы фаз. Решение задачи Стефана следует решению одномерного уравнения теплопроводности. При отсутствии во льду источников тепла и его стоков оно принимает вид

$$T(t, z) = T_0 + C \int_0^{z/\sqrt{t}} \exp(-y^2/4k) dy,$$

где $k = \lambda_l / C_l \rho_l$. Если положить

$$h(t) = \gamma \sqrt{t} \tag{1.3}$$

и выполнить соответствующие подстановки в (1.1), то из полученных соотношений определяются значения C и γ .

Особенностью подобного подхода является пропорциональность перемещения фазовой границы дробной степени времени \sqrt{t} . Следовательно, скорость перемещения нижней кромки льда пропорциональна $1/\sqrt{t}$. На начальном этапе эволюции $t \sim 0$, скорость принимает существенно завышенные значения и поэтому (1.3) не отражает реальную ситуацию: для компенсации высокой скорости перемещения следует ограничиться весьма малым промежутком времени между наблюдениями. Таким образом, (1.3) целесообразно использовать по истечении достаточного времени от начала процесса льдообразования. Этап первоначального изменения толщины определяется более сложным законом. На начальных этапах эволюции неопределенность количественных границ бесконечно малых величин обуславливает ограниченное применение указанных соотношений. Кроме того, не указаны рамки применимости модели. Действительно, мелкие водоемы зимой могут полностью перемерзнуть, а в соответствии с (1.3) толщина покрова имеет тенденцию к монотонному росту. К недостаткам модели следует отнести также тот факт, что динамика нижней поверхности толщи не зависит от ее толщины. Не учитывается проявление свойств самой водной среды, которая является источником льда. В реальных условиях подобное представление дает хорошее согласие с наблюдениями, однако для его использования требуются дополнитель-

ные вычислительные эксперименты ориентированные на определение ряда констант. Соотношение (1.3) также не описывает процесс весенне-летнего таяния толщи. Поэтому различают модели для этапов формирования покрова и его разрушения, что приводит к проблеме согласования их решений в зимний период.

В многочисленных публикациях по данной тематике приводятся методики и регрессионные уравнения, позволяющие оценить толщину ледяного покрова и ряд других его показателей. Например, З.К. Абузьяров с соавторами [1] приводят ряд таких регрессионных уравнений и схему расчета появления льда в стратифицированном море. Вместо температуры атмосферы в них присутствует ее среднее значение за промежуток времени, при определении границ которого вносятся субъективные мнения самих исследователей. Понятно, что область применимости подобных моделей ограничена только наиболее типичными ситуациями. При использовании аппарата регрессионных уравнений присутствует также проблема способа учета членов, отражающих внешнее воздействие на ледяной покров различного типа динамических факторов. Оценка их влияния обычно сводится к спектральному анализу рядов наблюдений скорости ветра за определенный период времени. Включение скорости ветра в состав предикторов соответствующих линейных регрессионных уравнений накладывает жесткие ограничения на диапазон ее изменения. Например, при расчете сроков замерзания следует учитывать скорость ветра, превышающую 5 м/с. Если тип функциональной связи предикторов и зависимой переменной заранее неизвестен, то для решения этой проблемы может быть использован арсенал методов группового учета аргументов (МГУА) [33], при использовании которых синтезируется модель явления. В данном случае она строится в результате последовательного выделения оптимальных трендов и частных линейных описаний. Однако и в этой ситуации ограниченное использование таких моделей обусловлено их региональной привязкой.

1.2. ДРЕЙФ МОРСКОГО ЛЬДА

Дрейф морского льда обусловлен воздействием приложенных к нему внешних сил. Поэтому баланс количества движения сил, определяющих дрейф и деформации льда, описывается соотношением [23, 6]

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\tau}_a + \vec{\tau}_w + \vec{F}_c + \vec{F}_p + \vec{F}_\Phi + \vec{F}_a,$$

где m, \vec{u} – масса льда и скорость его дрейфа; $\vec{\tau}_a, \vec{\tau}_w$ – касательные напряжения на единицах площади верхней и нижней поверхности льда соответственно; \vec{F}_c – сила Кориолиса; \vec{F}_p – проекция силы тяжести на поверхность моря; \vec{F}_Φ – сопротивление формы льдины; \vec{F}_a – внутреннее сопротивление, причиной которого явля-

ется взаимодействие льдин между собой. В соответствии с выбранной формализацией выражений для каждого члена правой части и различают различные модели дрейфа льда. В рассматриваемых ниже случаях присутствует набор параметров, численная оценка которых выполнена только для покрова морей арктического бассейна. Поэтому при адаптации моделей для покрова Японского моря следует выполнить комплекс исследований численного характера по уточнению их параметров.

Численные оценки и прямые измерения скорости дрейфа [127, 85] указывают, что адвективная инерционная составляющая дрейфа на два-три порядка меньше остальных величин [124, 125]. Более того, если временной шаг модели не меньше одних суток, то в силу малости $m \frac{d\bar{u}}{dt}$ дрейф льда в течение этого шага можно считать стационарным. Для процессов со временем осреднения свыше суток силы инерции несущественны. Дополнительным аргументом полезности подобного рассмотрения служит тот факт, что только специальные исследования могут быть обеспечены подробным набором измерений резко изменяющихся внешних воздействий.

Первые две составляющие баланса являются основными причинами дрейфа льда. При этом $\bar{\tau}_w$ включает в себя силу трения, инициированную относительным движением ледяного покрова и океана под ним. В работе [121] указывается, что еще в ранних наблюдениях Нансена и последующих наблюдениях Н.Н. Зубова был отмечен этот факт. Так, в частности, Нансен также эмпирически установил, что для отделенных от берега районов моря лед отклоняется приблизительно на 30° вправо от направления ветра и дрейфует со скоростью $1/50$ скорости ветра. Н.Н. Зубов выполнил подобные исследования и определил, что дрейф вмерзших в лед судов следует изобарам со скоростями около $1/100$ скорости геострофического ветра. В практике исследований обычно полагается, что верхняя оценка скорости дрейфа льда не превосходит 2–3 % от скорости ветра.

В подходе В.В. Шулейкина [110] принимается, что величины напряжений трения на верхних и нижних границах покрова пропорциональны квадратам скоростей ветра и относительной скорости дрейфа. В формализации $\bar{\tau}_a$ и $\bar{\tau}_w$ Д. Ротсрока [128] предлагается линейная аппроксимация через экмановские слои:

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_a &= C_A(\bar{U}_g \cos\theta_a + \vec{k} \times \bar{U}_g \sin\theta_a) \\ \bar{\tau}_w &= C_w[(\bar{U}_w - \bar{u}) \cos\theta_w + \vec{k} \times (\bar{U}_w - \bar{u}) \sin\theta_w],\end{aligned}$$

где \bar{U}_g – обусловленная градиентом атмосферного давления скорость геострофического ветра; \bar{U}_w – обусловленная градиентом динамической высоты скорость геострофического течения воды; C_A и C_w – константы; θ_a и θ_w – констан-

ты углов отклонения направления ветра от градиента и отклонения направления дрейфа льда от направления ветра соответственно; \vec{k} – единичный вектор нормали к поверхности. Поскольку скорость ветра на два порядка больше скорости дрейфа, то в первом соотношении с точностью до нескольких процентов можно пренебречь значением последней. Геоострофический ветер \vec{U}_g обусловлен градиентом атмосферного давления, а \vec{U}_w равна скорости течения на нижней границе слоя трения. Полагается, что она находится в геоострофическом балансе. Выполненные М. Мак-Фи [125, 126] и М. Ланглебеном [124] измерения океанического поверхностного слоя показали высокую степень его несоответствия указанному линейному представлению. В случае

$$C_A \approx 1,2 \cdot 10^{-3} \rho_a |\vec{U}_g| \text{ и } \tilde{N}_w \approx 5,5 \cdot 10^{-3} \rho_w |\vec{U}_w - \vec{u}|,$$

где ρ_a и ρ_w – плотности атмосферы и воды, результирующее квадратичное приближение в большей степени отражает реальную ситуацию. Чтобы воспользоваться указанными представлениями, помимо прочего требуется еще знание θ_a и θ_w углов отклонений. Увеличение толщины покрова приводит к их росту, а ветровой коэффициент уменьшается почти линейно. Очевидно, что в подобной ситуации для них отсутствует универсальное представление. Поэтому общепринятым представлением квадратичной зависимости $\vec{\tau}_a$ от скорости ветра является соотношение

$$\vec{\tau}_a = \rho_a C_{10} \vec{W}_{10} |\vec{W}_{10}|, \quad (1.4)$$

где C_{10} – так называемый коэффициент сопротивления, \vec{W}_{10} – скорость ветра на стандартной для подобных исследований 10-метровой высоте (подстрочный индекс указывает высоту горизонта). Среднее значение C_{10} по данным работы [124] составляет $\langle C_{10} \rangle = 2,6 \cdot 10^{-3}$. Допустимым также является использование и других горизонтов. Например, в некоторых случаях в качестве высоты горизонта выступает 2-метровая высота. Но тогда следует учитывать методику проведения метеорологических наблюдений для оценки среднего значения соответствующего коэффициента пропорциональности.

Касательные напряжения на границе лед–вода задаются выражениями [42]

$$\begin{aligned} \tau_{wx} &= \rho_w C_\tau S(v - u) \\ \tau_{wy} &= -\rho_w C_\tau S(v + u) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $C_\tau = 2,6 \cdot 10^{-3}$ [59, 60]; S – сплоченность покрова; u, v – x и y составляющие вектора дрейфа. Следуя оценкам [119–123], порядок сил $\vec{\tau}_a$ и $\vec{\tau}_w$ составляет 10^{-1} Н/м^2 .

В пионерных работах по тематике дрейфа льда учитывались только касательные напряжения на верхней и нижней поверхности льда и сила Кориолиса. Полагается, что во вращающейся вместе с Землей системе координат она приложена ко льду. Согласно определению силы Кориолиса

$$\vec{F}_c = -2mf\vec{k} \times \vec{u}, \quad (1.6)$$

и эту составляющую баланса сил всегда следует учитывать как для стационарного, так и для нестационарного дрейфа (f – параметр Кориолиса): в течение суток может измениться как величина скорости дрейфа, так и ее направление. При этом действие τ_w не может быть направлено против скорости дрейфа. Поэтому измерения показывают [121], что порядок \vec{F}_c такой же, как и τ_w , – около 10^{-1} Н/м².

Проекция силы тяжести на поверхность моря согласно ее определению

$$\vec{F}_p = -\rho_l g H \nabla_H \xi,$$

где уклон поверхности моря характеризуется градиентом $\nabla_H \xi$; ξ – отклонение уровня от поверхности равного потенциала, g – ускорение силы тяжести. Природа этой силы обусловлена многими причинами, в частности градиентом атмосферного давления, приливными волнами и волнами различной природы и др. Ее значимость проявляется только при расчетах приливного дрейфа льда. В общем случае она равна нескольким процентам от ветровой составляющей для периода нескольких суток [122, 85].

Значимость силы сопротивления формы льдины \vec{F}_Φ существенна только для отдельных льдин при их дрейфе в разреженных ледяных полях. Ее численное значение определяется выражением [42]

$$\vec{F}_\Phi = -C_m S_m \rho_w |\vec{u}_w - \vec{u}| (\vec{u}_w - \vec{u}) / 2 = -C_\varepsilon S_\varepsilon |\vec{u}_w - \vec{u}| (\vec{u}_w - \vec{u}) / 2,$$

где S_m – площадь миделевого сечения подводной части льдины; S_ε – площадь смоченной поверхности льдины; C_m, C_ε – коэффициенты сопротивления формы для соответствующих площадей; \vec{u}_w – скорость течения на нижней границе слоя трения. На основании экспериментальных исследований [20] получена аппроксимация

$$C_\varepsilon = 2,7 \cdot 10^{-3} + 0,29 h_w / l_\varepsilon,$$

где h_w, l_ε – толщина погруженной части льдины и ее горизонтальный размер. Присутствие \vec{F}_Φ имеет место и при воздействии на льдину ветрового потока.

Трудность ее учета обусловлена присутствием в ее выражении констант, для определения которых требуется проведение ряда натуральных экспериментов. При этом ее вклад в общий баланс несущественен, поскольку отдельные льдины незначительно возвышаются над ледяным покровом.

Силы внутреннего взаимодействия \vec{F}_e обусловлены температурами атмосферы и воды, а также берегами окружающей море суши. Оценки А. Торндайка и Р. Колони [131] показывают, что для морей Арктического бассейна влияние берегов сказывается на расстояниях порядка 400 км. Величина силы существенно зависит от толщины покрова. Важным этапом для формализации \vec{F}_e является выбор способа представления ледяного покрова как материального тела. Для описания реологических свойств ледяного покрова обычно используется аппарат механики сплошных сред. Тогда сила взаимодействия определяется дивергенцией тензора внутренних напряжений σ :

$$H^{-1}\vec{F}_e = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}, \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right).$$

Для нахождения силы следует указать связь σ с параметрами состояния покрова и характеристиками поля дрейфа. При описании связи обычно используется феноменологический подход. В простейших случаях он рассматривается посредством плоского, сплошного и изотропного слоя. Его приемлемость обоснована только для случаев континуального представления, где можно пренебречь дискретностью и анизотропией покрова. В других подходах ему приписываются вязкие, упругие и пластические свойства.

В рассмотрении С.Н. Овсиенко и С.Н. Овсиенко, В.О. Эфроимсона [59, 60] ледяной покров представлен сплошной двумерной средой, которая удовлетворяет постулатам Стокса. Далее определенным образом формализуется политропическое соотношение между давлением и сплоченностью. По существу, он представляет собой газодинамический аналог схемы Харлоу [94]. Его применение имеет смысл в том случае, если число выделенных на некоторой площади льдин является достаточным для усреднения по площади, линейный размер которой значительно меньше пространственного масштаба задачи. При выполнении указанных условий аппроксимация аналога гидростатического давления P может быть представлена выражением

$$P = P_0 \left(\frac{S}{S_0} \right)^\kappa \Theta \left(\frac{dS}{dt} \right), \quad (1.7)$$

где P_0, S_0, κ – неотрицательные константы, подлежащие определению исходя из косвенных оценок и предположений; S – сплоченность ледяного покрова;

$\Theta\left(\frac{dS}{dt}\right)$ – так называемая ступенчатая функция Хевисайда, равная 1 при положительности аргумента, 0 – для остальных случаев. Следование натурным измерениям [13, 34] и соотношениям порядка величин в (1.7) указывает оценки: $P_0 \sim 10^6 \div 10^7$ г/с² для неарктических морей и $P_0 \sim 10^7 \div 10^8$ г/с² – для Арктики; $S_0 \sim 0,7 \div 0,8$, $\kappa \sim 3 \div 6$.

Начальные и граничные условия задаются следующим образом. Обычно полагают нулевое начальное распределение скорости дрейфа. Поскольку расчетная область ограничена жидкой (лед–вода) и твердой (береговая линия) границами, то различают два типа граничных условий. Для конкретизации граничных условий на первой из них исходят из отсутствия давления на жидкой границе:

$$P = 0.$$

Для нее также требуется указать интенсивность обмена льдом между областью расчета и соответствующими внешними областями. Поскольку информация подобного характера, как правило, отсутствует, то на жидкой границе представляется естественным выполнение соотношения

$$\frac{\partial \vec{u}_n}{\partial n} = 0,$$

где \vec{n} – внутренняя нормаль к границе, u_n – нормальная составляющая вектора скорости. Согласно данному условию скорость дрейфа при переходе через жидкую границу не изменяется. М.И. Масловский [49, 50] впервые рассмотрел его применимость для моделирования ледяного покрова. На границе с берегом задаются два вида условий. Одно из них соответствует случаю отжимного дрейфа, когда выполняется приведенное выше соотношение. Другое условие имеет место при нажимном дрейфе. Понятно, что в этом случае отсутствует поступление льда за пределы береговой линии и нормальная составляющая вектора скорости обращается в ноль

$$P > 0 \text{ и } u_n = 0.$$

Величина временного шага интегрирования Δt определяет критерий выбора модели дрейфа. Если Δt порядка 10^3 с, то в уравнении для скорости дрейфа присутствуют короткопериодические составляющие – проекция силы тяжести на поверхность моря \vec{F}_p и сила сопротивления формы льдины \vec{F}_σ . При $\Delta t \sim 8,4 \cdot 10^4$ с эти силы не учитываются, поскольку дрейф льда под действием приложенной внешней нагрузки развивается быстро, и уже через 2–3 ч его можно считать установившимся [28, 73]. Следовательно, средняя скорость дрейфа за этот промежуток имеет квазистационарный характер и при расчетах можно пре-

небредь как эйлеровой производной от скоростей по времени (левой частью уравнений движения), так и изменением массы льда M в выражении для сил. Выбор именно данного временного шага для численного моделирования эволюции покрова Японского моря во многом обусловлен доступностью натуральных измерений и величиной временного шага интегрирования.

1.3. ЭВОЛЮЦИЯ ПЛОЩАДЕЙ И ТОЛЩИН ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

Пространственно-временные изменения структурных характеристик ледяного покрова обусловлены термическим ростом и разрушением льда, его дрейфом и непосредственным взаимодействием ледяных полей. В качестве таких характеристик обычно выступают макроскопические параметры состояния покрова – его толщина h и сплоченность S . Они в свою очередь оказывают влияние на характер взаимодействия и, следовательно, на дрейф покрова [91]. Детализация покрова на площади льда различных категорий толщин приводит к необходимости введения в рассмотрение соответствующей функции распределения. Основными причинами ее динамики являются определенные механизмы воздействия термического фактора и факторы механического перераспределения льда.

Уравнение для сплоченности льда в море было впервые предложено Д.А. Дрогайцевым [24] и в дальнейшем модифицировано Е.Г. Никифоровым [58]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{u}S),$$

где $\vec{u} = (u, v)$ – скорость дрейфа льда. В данном случае покров представляется посредством совокупности твердых пластинок. С формальной стороны эволюция сплоченности описывается уравнением неразрывности ледяного покрова и им можно ограничиться, если не учитываются термодинамические процессы формирования и разрушения покрова, расходы льда на торосы и различного рода наслоения.

Эволюция морского льда различной толщины обусловлена его деформацией, адвекцией, ростом и разрушением. При деформации в результате торошения формируются лед повышенной толщины и открытая вода. В местах же развождений вновь формируется тонкий лед, который в дальнейшем может трансформироваться в более толстый лед. Аналогичным образом происходит трансформация и других градаций толщин. Вследствие этого площади толстых льдов увеличиваются. В некоторых случаях упрощенное описание исследуемой системы оказывается даже более полезным, поскольку принимаются во внимание только принципиальные и основные особенности функционирования системы. Так, У. Хиблер [97] указывает на целесообразность использования только двух градаций толщин льда – тонкого и толстого льда. Он подчеркивает исключительно

важную роль именно тонкого льда, поскольку он обладает малой прочностью и высокой скоростью роста. Указанные причины в целом определяют многие динамические и термические свойства ледяного покрова. Следствием подобного рассмотрения является включение в одну категорию открытой воды и тонкого льда. Площадь тонкого льда равна $1 - S$, и поэтому для описания эволюции покрова достаточно только двух его характеристик – площади толстого льда S и его массы m на единицу площади. Соответствующие уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= -\operatorname{div}(\bar{u}S) + f_s \\ \frac{\partial m}{\partial t} &= -\operatorname{div}(\bar{u}m) + f_m \end{aligned}, \quad (1.8)$$

где f_s, f_m – термодинамические источники и/или стоки льда. При их отсутствии соотношения представляют обычные уравнения неразрывности без наличия источников и стоков ледового материала. Поскольку открытая вода и тонкий лед составляют одну категорию, то область применимости модели ограничена ситуациями, где не учитываются процессы перераспределения площадей первой категории во вторую и наоборот. У. Хиблер и К. Бриан [121] принимают границу разделения тонкого льда от толстого льда значением $h_0 = 0,5$ м, что является неприемлемым для ледяного покрова Японского моря.

А. Торндайк с соавторами [130, 131] предложили расширенную схему рассмотрения эволюции покрова. В разработанном ими подходе увеличение числа компонент не приводит к существенному усложнению решения проблемы. Схема основана на введении в рассуждения функции распределения относительной площади льда $G(h, t)$ с толщиной h . Если не учитывать адвекцию и механические деформации, то очевидно выполнение соотношения

$$G(h, t) = G(h + dh, t + dt).$$

Действительно, в результате термического воздействия лед за временной интервал dt изменяет свою толщину на величину dh . Далее, использование стандартной методологии (аппроксимация правой части в виде линейной функции dh и dt) приводит к соответствующему уравнению неразрывности для функции плотности распределения $g(x, y, t, h)$. В контексте принятых обозначений $g(x, y, t, 0)$ соответствует открытой воде. В случае единичной площади района сплоченность определяет площадь покрова льда на его акватории. Поэтому для удобства изложения площадь района нормируется единицей, и тогда для района акватории понятия «сплоченность» и «площадь льда» эквивалентны между собой. Согласно классическому определению функции распределения выражение $g(x, y, t, h)dh$ определяет общую площадь покрова, толщина которого изменяется от h до $h + dh$. Суммирование для дискретного представления по-

крова или интегрирование в непрерывном случае площадей различной толщины, включая и воду (площадь льда с нулевой толщиной), определяет условие ее нормировки $\int_0^{h_{\max}} g dh = 1$, где h_{\max} – максимальная толщина покрова. В этих обозначениях соответствующее уравнение эволюции принимает вид

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} g u + \frac{\partial}{\partial y} g v + \frac{\partial}{\partial h} g \dot{h} = \psi, \quad (1.9)$$

где $\dot{h} \equiv \frac{dh}{dt}$ – скорость вертикального термического роста/разрушения льда. Перераспределение льда от одной толщины к другой за счет торошения и сплава льда, а также появление открытой воды описывается функцией ψ . Введение функции перераспределения является важным звеном в цепочке рассуждений авторов [130, 131]. В случае равенства ее нулю представленное выражение является уравнением неразрывности в пространстве географических координат, времени и толщины. Его интегрирование по толщине h приводит к следующему. Функция распределения удовлетворяет условию нормировки, и поэтому интеграл от первого члена равен нулю. Интегралы от второго и третьего членов есть дивергенция вектора скорости дрейфа. Интеграл от четвертого члена $(g\dot{h})|_{h_{\max}} - (g\dot{h})|_0$ представляет собой изменение общей площади, вызванное действием термического фактора. Поскольку в данной формализации изменения общей площади района отсутствуют, то это выражение равно нулю. Поэтому результат интегрирования определяется соотношением

$$\int_0^{h_{\max}} \psi dh = \text{div} \vec{u}.$$

Фактически это означает, что при дрейфе льда на функцию перераспределения накладывается условие: она компенсирует сокращение или рост площади льда. Второе условие следует из того, что при торошении не происходит изменения приходящегося на единицу площади объема массы льда

$$\int_0^{h_{\max}} h \psi dh = 0.$$

Следует заметить общность формулировки закона эволюции g . Действительно, в зависимости от направлений и детальности исследований имеется возможность спецификации как скорости термического нарастания или стаивания

\dot{h} , так и функции перераспределения ψ . В частности, если положить линейный вид зависимости ψ от h , то

$$\psi(h, \bar{u}) = \frac{4}{h_{\max}} \left(1 - 1,5 \frac{h}{h_{\max}}\right) \text{div} \bar{u}. \quad (1.10)$$

Этот результат аналогичен [123, 85]: в условиях конвергенции тонкий лед должен тороситься, и, следовательно, функция ψ преобразует тонкий лед в градацию толстого льда, а при дивергенции льда продуцируется открытая вода. При данной форме представления ψ автоматически выполняется условие отсутствия торосения в случае $\text{div} \bar{u} = 0$. Однако в реальных условиях в этой ситуации имеет место выравнивание толщин находящихся в непосредственном контакте отдельных льдин.

При моделировании покрова морей Арктического бассейна в большинстве случаев принимается отсутствие термодинамических членов. А. Семтнер [129] полагает независимость \dot{h} от термической истории льда. Для многолетнего льда это допущение заведомо не выполняется: накопленное летом тепло существенно влияет на последующие скорости его роста. Однако в этой работе А. Семтнер показал, что если допустить некоторую ошибку в определении сезонного хода толщины льда, то из независимости от истории термодинамической модели можно получить близкие к действительности средние годовые толщины.

Л.А. Тимохов и Д.Е. Хейсин на основании положений статистической физики выполнили обобщение рассмотренных выше подходов [84, 85]. Для согласования формальных построений кинетической теории и эволюции ледяного покрова последний рассматривается как система множества частиц льда. В рамках представлений авторов эволюция льда описывается тремя самостоятельными уравнениями. Каждое из них соответствует определенному уровню детализации процесса эволюции и формально представляет собой кинетическое уравнение в трехмерном фазовом пространстве пространственных координат x_1, x_2 и параметра состояния покрова φ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \dot{x}_\alpha f + \frac{\partial}{\partial \varphi} \dot{\varphi} f = I_\varphi,$$

где суммирование выполняется по повторяющимся индексам, f – функция распределения параметра состояния; $\dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{dt}$ – термическая составляющая эволюции этого параметра; I_φ – так называемый интеграл столкновений, который для одних градаций льда служит источником ледового материала, а для других – его

стоком. При записи уравнений эволюции полагается слабая зависимость соответствующих функций распределения от разброса скоростей. Поэтому в дальнейшем членом $\frac{\partial}{\partial_{\alpha} x_{\alpha}} \dot{x}_{\alpha} f$ можно пренебречь. Иными словами, различные градации льда имеют одну и ту же среднюю скорость дрейфа. Допустимость подобного рассмотрения обусловлена размерами минимальной пространственной дискретности решаемых задач и выбором в большинстве случаев суточного временного шага интегрирования. При рассмотрении распределения массы $\varphi \equiv m$; для распределения площадей льда по его толщине $\varphi \equiv h$; для распределения общей площади покрова $\varphi \equiv S$.

Интеграл столкновений характеризует суммарное механическое взаимодействие отдельных ледяных полей, отнесенное к единице элемента фазового пространства. Для случаев распределения льда по его толщинам и распределения площадей льда интегралы столкновений в обозначениях авторов определяются выражениями

$$I_h = \int_{h_{\min}}^h z(h) f_h(h) dh - a_h f_h(h) \text{ и } I_S = \int_S^{S_{\max}} \xi(S) f_S(S) dS - a_S f_S(S). \quad (1.11)$$

Подстрочные индексы конкретизируют параметр состояния покрова и соответствующую функцию распределения. В первом выражении функция $z(h)$ является плотностью вероятности перехода льдов с толщинами $h' \leq h$ в градацию льда толщиной h , а a_h – параметр пропорциональности скорости выторачивания льда толщиной h . Второе выражение описывает механизм дробления ледяных полей, $\xi(S)$ – плотность вероятности перехода путем дробления больших ледяных полей $S' \geq S$ в ледяные образования площадью S , a_S – параметр пропорциональности скорости дробления льдин.

Реализация этого подхода возможна только в случаях, когда известны функции $z(h)$ и $\xi(S)$. Для их оценки следует выполнить определенную совокупность экспериментальных и вычислительных исследований. Аналогичная ситуация относится и к остальным параметрам моделей. В исходных построениях также не учитывается взаимосвязь распределений масс льда f_m и площадей различных градаций толщин f_h . Наличие же такой связи очевидно: интегрирование уравнения f_h по всему диапазону толщин определяет эволюцию сплоченности. Следует особо отметить тот факт, что если уравнение эволюции сплоченности S следует из уравнения для массы m , то для вывода уравнения f_h используется иная схема логических построений. Сначала в пределах толщины h интегрируется уравнение для распределения f_m по вертикальной координате. Далее для набора выделенных колонок льда с толщинами от h до

$h + \Delta h$ выписывается уравнение неразрывности с учетом источников и стока материала для их функции распределения. Несмотря на различия исходных положений, в результате для масс льда и толщин покрова получаются однотипные уравнения. Однако первая переменная из них является аддитивным параметром системы, а толщина покрова – нет. Кроме того, при построении цепочки рассуждений неясным остается важный вопрос о первичных размерах частиц льда. Однако выбор порядка их размеров существенным образом определяет параметризацию термического механизма индивидуальной эволюции частиц. Размеры частиц также существенны для вычисления аппроксимации интеграла столкновений.

Представляется, что основным недостатком вышеперечисленных подходов является рассмотрение только контактного взаимодействия отдельных льдин. В реальных же условиях наблюдается их перераспределение в рамках одного района, в частности агрегация отдельных льдин, и при отсутствии выраженного дрейфа льда.

Рассмотренные выше модели, за исключением последней, неявно основываются на положениях физической кинетики, согласно которым функция распределения частиц $f(t, \vec{r}, \vec{p})$ в их фазовом пространстве (\vec{r}, \vec{p}) удовлетворяет уравнению неразрывности. В дивергентной форме оно имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} v_\alpha f + \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha f = St(f), \quad (1.12)$$

где \vec{r} , \vec{p} и $\vec{v} = \vec{p}/m$ – координата, импульс и скорость частицы. Второй член левой части определяет изменение числа частиц в элементе фазового объема, которое обусловлено их движением, третий член – изменение числа частиц, вызванное действием внешних сил. Поскольку для ледяного покрова f практически не зависит от разброса скоростей, то в дальнейшем рассмотрении этот член отсутствует. В правой части находится так называемый интеграл столкновений, характеризующий баланс прибывающих и убывающих вследствие столкновений частиц элемента объема фазового пространства. В общем случае он определяется соотношением

$$St(f) \equiv q_{um} - q_{cm}. \quad (1.13)$$

Здесь полагается, что столкновения между частицами приводят к скачкообразному изменению проекций скорости при неизменных координатах и, следовательно, к скачкообразному перемещению изображающих точек в их фазовом пространстве. В этом представлении изображающие точки «гибнут» в одних частях этого пространства и «рождаются» в других, не пересекая границ выделенного в пространстве объема [43, 74]. Поэтому члены правой части являются собой мощности источников (q_{um}) и стоков (q_{cm}) – число частиц со скоростью \vec{v} в точке \vec{r} , появляющихся или исчезающих за единицу времени в единице

объема. Если учитываются только парные соударения частиц, скорости которых до соударения и после него лежат в интервалах $(v, v + dv)$, $(v', v' + dv')$, $(\tilde{v}, \tilde{v} + d\tilde{v})$ и $(\tilde{v}', \tilde{v}' + d\tilde{v}')$, то при достаточно общих положениях соотношение определяется выражением

$$St(f) = \iint |v - v'| (\tilde{f}f' - ff') d\sigma d^3v',$$

где $f, f', \tilde{f}, \tilde{f}'$ – соответствующие плотности частиц; $d\sigma$ – дифференциальное сечение процесса столкновений [43, 38, 66, 74]. После подстановки этого выражения в (1.12) получается кинетическое уравнение Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} v_\alpha f + \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha f = \iint |v - v'| (\tilde{f}f' - ff') d\sigma d^3v'.$$

Сопоставление используемых при его выводе положений с представлениями, которые применяются при выводе рассмотренных выше моделей эволюции, показывает следующее. В моделях типа (1.8) взаимодействие отдельных льдин (столкновения частиц) вообще не учитывается, а в (1.9) результат этого взаимодействия сводится только к образованию торосов посредством задания функции перераспределения (1.10). Поэтому вне рамок модели оказываются случаи агрегации отдельных льдин в их обширные поля и выравнивание толщин находящихся в контакте отдельных льдин при отсутствии дрейфа льда. Для аппроксимации результата столкновений используются соотношения (1.11). Здесь они описывают процессы перераспределения геометрических свойств покрова при его дроблении посредством весовых функций $z(h)$ и $\xi(S)$. При этом не указаны функциональная структура и условия, которым они должны удовлетворять. Кроме того, при использовании в этой форме записи кинетического уравнения отсутствует возможность определения количества льда определенной толщины для конкретных градаций сплоченности. Впрочем эта особенность имеет место для всех перечисленных моделей. Вне области рассмотрения оказывается описание эволюции припая прибрежных районов. Его численное моделирование для подобных Японскому морю водоемов является актуальным. Действительно, на побережьях морей, как правило, располагается ряд потенциально значимых природных месторождений полезных ископаемых. Здесь же находятся крупные промысловые организации, транспортные и коммуникационные узлы, для работы которых необходим прогноз ледовой обстановки.

Для описания площади покрытия льдом относительно закрытых участков акватории моря (например, залив Петра Великого) может быть использована иная, чем рассматривалась выше, логическая схема. Пусть в начальный момент появляется первичная частица, или зародыш. Последующие зародыши появля-

ются в моменты t_1, t_2, \dots, t_k в последовательности и с частотой, определяемой функцией $N(t)$. Если $\sigma_i(t)$ – текущая площадь i -го зародыша, то при одинаковом изменении $\sigma_i(t) = \sigma(t - t_i)$, и тогда их суммарная поверхность есть $A(t) = \sum_{i=0}^K N_i \sigma(t - t_i)$. Введение механизма образования зародышей $\dot{N} = f(t)$ преобразует выражение для суммарной площади покрытия в интеграл

$$A(t) = \int_0^t \dot{N}|_{t=\tau} \sigma(t - \tau) d\tau, \quad (1.14)$$

где τ – время появления данного зародыша. Если принимается круговая аппроксимация площади зародыша и v – скорость термического роста радиуса, то $r = v(t - \tau)$ и $\sigma(t) = 4\pi r^2 = 4\pi v^2 (t - \tau)^2$. Чтобы учесть перекрытие площадей зародышей, следует использовать принцип Авраами [80]: отношение приращения истинной трансформации исходного субстрата в продукт $\Delta\alpha$ к фиктивному приращению $\Delta\alpha_f$ определяется количеством оставшегося субстрата, или

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\alpha_f} = 1 - \alpha, \text{ где количество исходного нормировано единицей. В соответствии с}$$

этим принципом кинетика зародышей определяется вероятностью их образования и скоростью молекулярного обмена между зародышем и фазой [26, 78]. В [105] подобный механизм был использован для описания покрытия образца участками новой фазы, где результаты показали хорошее согласие с экспериментами.

Представляется, что подобные подходы приемлемы для качественного описания возможных ситуаций. Однако для численного моделирования эволюции требуется детализация рассматриваемых процессов. Конкретный вид функций термического роста и разрушения определяется целями исследований. В практике исследований морского льда эти члены обычно опускаются. Допустимость подобного представления эволюции возможна только для квазистационарных ситуаций, где влиянием этих членов можно пренебречь. Поэтому этапы формирования покрова и его разрушения находятся вне области применимости рассмотренных подходов. Если все же они присутствуют в уравнениях, то не указаны их функциональная структура и параметрический механизм термического роста–разрушения льда. Не приводится методика оценки параметров, которые не измеряются в непосредственных экспериментах или их оценка сопряжена с определенными трудностями. Типична ситуация, когда в параметризации функций участвуют некоторые комбинации измеряемых параметров состояний и можно оценить только порядок значений коэффициентов при этих комбинациях. Для акватории морей, где лед присутствует только в определенный период года,

актуальными являются как раз вопросы описания механизма именно термического роста и разрушения льда. Использование для этих целей соотношений типа (1.2)–(1.3) представляется весьма затруднительным вследствие ограниченного описания с их помощью реальных процессов и присутствия в подобном представлении параметров, оценка которых в реальных условиях связана с определенными трудностями инструментального свойства.

Адаптация рассмотренных подходов для конкретных объектов сопряжена с рядом методологических проблем ее реализации. Так, не указаны методики оценки функций термической эволюции покрова и способов построения оценок параметров моделей. Важной также является обычно не рассматриваемая проблема оценки адекватности предлагаемых моделей натурным экспериментам. Для ее решения следует сначала выполнить статистическое исследование натуральных данных. Поскольку здесь, как правило, имеют место проблемы с восстановлением ряда пропущенных значений, то необходима разработка алгоритмов их численного восстановления. Кроме того, наличие нескольких наборов признаков и многомерность исходных данных приводят к необходимости классификации многомерных наблюдений. Результаты классификации позволяют оценить статистическую представительность выборки, а также могут быть использованы для оценки числа присутствующих в выборке выраженных состояний покрова. Результаты исследований позволяют выявить региональные особенности ледяного покрова Японского моря и непосредственно участвуют в построении модели объекта.

1.4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДРЕЙФА ЛЬДА

Аналитическое исследование характерных для ледяного покрова процессов заключается в построении определяющих сами процессы уравнений, а также в указании соответствующих граничных условий. Поскольку дрейф покрова обусловлен воздействием на него ветра и морских течений, то уравнения модели для его геометрических параметров имеют форму уравнений переноса или кинетических уравнений Больцмана. Решение формализованной задачи аналитическими методами возможно только в ряде простейших и частных случаях. В общей же ситуации построение решения основывается на использовании определенной совокупности численных методов. Особенностью рассматриваемых здесь и в дальнейшем методов является выбор временного шага интегрирования, равного $8,4 \cdot 10^4$ с (1 сутки). В этом случае модель системы содержит определяющие эволюцию отдельных параметров покрова уравнения, а скорость дрейфа рассчитывается на основании квазистационарного ее представления. То есть она задается посредством арифметических соотношений между членами правой части уравнений скорости дрейфа, за исключением проекции силы тяжести на поверхность моря и силы сопротивления формы льдины.

Согласно классификации уравнений в частных производных уравнение переноса относится к классу гиперболических уравнений. Для его решения применимы как явные, так и неявные вычислительные схемы, а также их определенные комбинации. Следует отметить, что реализация неявной схемы выполняется посредством итерационного процесса решения большого числа систем линейных уравнений. Поэтому любое возможное возмущение (в частности, ошибки округления) на некотором временном шаге оказывает непосредственное влияние на решение во всех узлах и на последующих временных шагах. Кроме того, для их использования требуются большие вычислительные ресурсы.

При численном моделировании ледяного покрова используются удовлетворяющие условию консервативности простейшие разностные схемы. Опыт их применения показывает, что пространственно-временные численные схемы центральных разностей (методы второго порядка точности, в частности метод Лакса–Вендроффа [51]) приводит к фиктивным осцилляциям большой амплитуды, и они чувствительны к нелинейной неустойчивости. Кроме того, эти схемы уменьшают численную диффузию, но при их использовании приходится жертвовать гарантированной положительностью решения [61]. Как введение соответствующего диффузионного члена, так и регулярное сглаживание решения не представляется физически обоснованным [6]. Вследствие этого обычно употребляется вычисление односторонних разностей.

Применение метода конечных элементов обеспечивает непрерывность решения, поскольку он основан на аппроксимации искомой функции посредством кусочно-линейной интерполяции полиномами низкой степени. Однако этот метод недостаточно эффективен для гиперболических уравнений.

Лагранжева формулировка процессов эволюции также используется при численных расчетах. В этом случае каждый отдельный выделенный элемент покрова эволюционирует посредством локальных взаимодействий с изменяющимися окружающими элементами и под воздействием внешних сил. Достоинством этих методов является отсутствие нефизической численной диффузии, возникающей при движении элементов через границы расчетных ячеек. Основные недостатки этих методов обусловлены проблемами описания поведения элементов вблизи твердых границ и громоздкостью вычислений при использовании большого числа элементов покрова.

Явные консервативные методы для одного измерения естественным образом обобщаются на уравнения двух чисел измерений и более.

Перечень наиболее часто используемых явных консервативных методов решения и их краткие характеристики приведены в табл. 1 [67].

При расчете перераспределения сплоченности на каждом шаге вычислений должно выполняться неравенство $S \leq 1$. При расчетах же перераспределения

Таблица 1

Метод	Алгоритм
Явный метод первого порядка точности	$\bar{B}_j^{n+1} = \bar{B}_j^n - (\bar{F}_{j+1}^n - \bar{F}_{j-1}^n) \frac{\Delta t}{2\Delta}$ <p>Всегда неустойчив</p>
Метод Лакса	$\bar{B}_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\bar{B}_{j+1}^n + \bar{B}_{j-1}^n) - (\bar{F}_{j+1}^n - \bar{F}_{j-1}^n) \frac{\Delta t}{2\Delta}$ <p>Устойчив при $\Delta t \leq \frac{\Delta}{ u }$</p>
Метод Лелевье	$\bar{B}_j^{n+1} = \bar{B}_j^n - \{(u\bar{B})_{j+1}^n - (u\bar{B})_j^n\} \frac{\Delta t}{\Delta}, \text{ если } u_j^n \leq 0$ $B_j^{n+1} = B_j^n - \{(uB)_j^n - (uB)_{j-1}^n\} \frac{\Delta t}{\Delta}, \text{ если } u_j^n \geq 0$ <p>Устойчив при $\Delta t \leq \frac{\Delta}{ u }$</p> <p>Применим только к переносу</p>
Двухшаговый метод Лакса–Вендроффа	$\bar{B}_{j+1/2}^{n+1/2} = (\bar{B}_{j+1}^n + \bar{B}_j^n) / 2 - (\bar{F}_{j+1}^n - \bar{F}_j^n) \frac{\Delta t}{\Delta}$ $\bar{B}_j^{n+1} = \bar{B}_j^n - \{\bar{F}_{j+1/2}^{n+1/2} - \bar{F}_{j-1/2}^{n+1/2}\} \frac{\Delta t}{\Delta}$ <p>Устойчив при $\Delta t \leq \frac{\Delta}{ u }$</p>
Метод «с перешагиванием»	$\bar{B}_j^{n+1} = \bar{B}_j^{n-1} - (\bar{F}_{j+1}^n - \bar{F}_{j-1}^n) \frac{\Delta t}{\Delta}$ <p>Устойчив при $\Delta t \leq \frac{\Delta}{ u }$</p>

Примечание. u – скорость переноса, Δ – характерная длина временного интервала.

льда можно получить значение сплоченности, превышающее 1. А это противоречит самому ее определению. Д.Е. Хейсин [96] предложил модификацию метода частиц, где это условие, согласно применяемым построениям, выполняется автоматически. Сначала вводится определенная градация толщин, а затем, следуя этим градациям, группируются сами площади отдельных льдин. В результате выполнения указанной процедуры формируются распределения по толщинам льда, или парциальные сплоченности $\{S_k\}_{k=0}^K$. Здесь K – число градаций толщин, а S_0 – относительная доля чистой воды. Сущность модификации состоит в том, что на каждом временном шаге перераспределение масс по градациям толщин удовлетворяет тождеству

$$\sum_{k=0}^K S_k \equiv 1.$$

Масса льда может перераспределяться по разрядам, увеличивая или уменьшая долю более толстого льда.

Явные консервативные методы для гиперболических уравнений [67]

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = 0,$$

где $\vec{F} = F(\vec{B})$ (пример, $\vec{F} = \vec{B}u$).

Подобным образом имитируется процесс торошения без прямого учета вызывающих его сил. Данный алгоритм основан на положении об однородности покрова в пределах расчетной ячейки. Поэтому качество расчета частных плотностей эквивалентно применению явной односторонней конечно-разностной схемы [6].

Расчет эволюции параметров покрова целесообразно проводить на основе именно явных схем. Действительно, типичный шаг по пространству обычно составляет десятки километров, и поэтому допустимым является большой временной шаг. Его величина такова, что заведомо выполняется условие устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви $\Delta t \leq \Delta / |u|$ [76]. При этом они просты в реализации, и им свойственна большая скорость проведения расчетов.

ВЫВОДЫ

Выполненный в главе анализ проблем моделирования ледяного покрова Японского моря обуславливает необходимость проведения следующих исследовательских работ.

1. Систематизировать экспериментальные наблюдения параметров состояния ледяного покрова, восстановить пропущенные значения. С помощью современных многомерных методов анализа данных (иерархической классификации, многомерного шкалирования (в том числе на основании развертки Пеано) и т. д.) выполнить исследование сформированной многомерной выборки. Результаты исследования представить в форме, удобной для выявления региональных особенностей ледового режима Японского моря.

2. Систематизировать экспериментальные наблюдения динамических параметров внешнего воздействия (температуры атмосферы и составляющих скорости ветра) на ледяной покров. Исследовать статистическую выборку наблюдений состояний этих переменных. Выявить соотношения между температурой

первичного формирования покрова и температурой начального разрушения ледяного покрова. Оценить наличие или отсутствие корреляционных зависимостей между температурой и параметрами состояния ледяного покрова.

3. Построить математическую модель эволюции ледяного покрова замерзающих морей, где учитываются термические факторы эволюции и действуют механизмы перераспределения льда. Исследовать модель и выполнить ее численную реализацию.

4. Разработать методику оценки параметров модели и выполнить численную реализацию методики. Оценить адекватность модели экспериментальным наблюдениям, которые описывают ледяной покров Японского моря.

5. Разработать методику прогноза ледового режима замерзающего моря на основании сведений о температуре воздуха и скорости ветра слоя атмосферы. Для ледяного покрова Японского моря выполнить численную реализацию методики.

6. На основании численной реализации методик и модели провести вычислительные эксперименты, позволяющие оценить состояние покрова при вариациях термического режима надледного слоя атмосферы. Выполнить прогноз состояния ледяного покрова моря для случая вероятного повышения температуры атмосферы (парниковый эффект).

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ЯПОНСКОГО МОРЯ

Изучение многокомпонентных систем в океанографии, геологии, технике и других прикладных областях основано на учете и оценке большого числа разнообразных по своей природе показателей. Адекватное же количественное описание таких систем, или совокупностей взаимодействующих между собой определенным образом элементов, возможно только в случае, когда число имеющихся единиц наблюдений (выборочных точек, объектов) достигает значительного объема и отражает основные особенности системы: наличие детерминированных и стохастических свойств, эволюционных этапов развития и скачков, обусловленных изменением функциональной структуры системы.

Основным инструментом выявления подобных особенностей являются методы анализа данных [17, 83, 99, 100]. Здесь под ними следует понимать совокупность как традиционных статистических приемов обработки данных, так и методов, где отсутствует их вероятностная интерпретация [132, 25, 53]. В настоящем случае системой является ледяной покров Японского моря, представленный выборкой декадных наблюдений для отдельных районов его акватории за период 1961 по 1989 г. Географическое положение моря обуславливает сложный и многофакторный динамический режим, проявляющийся неравномерным распределением сплоченностей и толщин покрова, многообразием форм и размеров отдельных льдин.

Ледяной покров характеризуется определенной пространственно-временной структурой, для которой отсутствуют как стационарные действующие связи, так и стационарный набор параметров его состояний. При этом допускается присутствие в пространстве его параметров как отдельных изолированных состояний, так и скоплений наблюдений, которые характеризуют отдельные свойства эволюции. Здесь термин «система» непосредственно соответствует его классическому определению: целое, составленное из частей; совокупность элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которая образует определенную целостность, единство [90]. Другими словами – это иерархически организованная и целенаправленно функционирующая совокупность большого числа связанных и взаимодействующих элементов. В качестве последних выступает ледяной покров отдельных районов акватории, а набор состояний всей системы определяется всей совокупностью исходных наблюдений. При наличии статистически значимой выборки для выявления указанных состояний и оценки их конфигурации в соответствующем признаковом пространстве целесообразно использование методов анализа данных.

Актуальность проведения статистических исследований обусловлена тем обстоятельством, что оно позволяет выявить как структуру процесса эволюции покрова, так и конкретизировать региональную специфику Японского моря. Кроме того, исследование экспериментального материала и выявление основных свойств функционирования системы являются одним из предварительных этапов построения математической модели явления. В настоящей части исследования решение этой задачи выполняется методами анализа данных. Применение набора методов этого класса обусловлено ограниченностью объема весьма дорогостоящих наблюдений. Указанное обстоятельство существенно повышает актуальность проблемы извлечения из нее наибольшего количества деталей механизма эволюции покрова. Рассматривается ряд частных задач. В частности, изучаются статистические свойства припая прибрежных районов моря и покрова отдельных районов моря.

Для оценки воздействия атмосферных процессов на ледяной покров исследуется выборка наблюдений, характеризующая температуру слоя воздуха и скорость ветра надледного слоя воздуха. Поскольку в используемой выборке имеют место случаи пропущенных значений ряда параметров, то для повышения ее статистической значимости применялись процедуры восстановления их значений.

2.1. КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

Изучение многофакторной системы методами анализа данных выполняется на основании статистических выборок наблюдений. В практике исследования ледяного покрова в качестве элементов отдельных наблюдений выступают выраженные в баллах соответствующих порядковых шкал оценки его геометрических характеристик. В некоторых случаях допустимым является анализ данных балльных оценок. Например, при построении экспертных систем анализируются балльные оценки экспертов. Однако для математического моделирования изучаемой системы требуются именно количественные оценки параметров явления.

2.1.1. Исходные данные и восстановление пропущенных значений

Основой используемого фактографического материала послужили: карты ледовых авиаразведок над дальневосточными морями; спутниковые снимки ледяного покрова морей, получаемые с ИСЗ серий «NOAA», «Метеор», «Космос» и т. п.; гидрометеорологические ежемесячники (ежегодники) по Дальневосточному региону, содержащие данные прибрежных гидрометеорологических станций и постов. В качестве дополнительной информации привлекались прибрежные радиолокационные и вертолетные наблюдения за льдом, попутные судовые наблюдения и т. д.

Обычно в течение декады имелось несколько карт или снимков ледяного покрова. В дальнейшем полученные фрагменты ледовой обстановки, включая материалы прибрежных наблюдений гидрометеостанций и постов, усреднялись для данной декады. Одновременно проводился и критический контроль получаемой информации. Минимальная дискретность построения карт ледовой обстановки, охватывающих всю акваторию конкретного моря и представляющих практически непрерывный ряд в течение ледового периода, составила одну декаду. Более высокое временное разрешение, учитывая сложность получения ледовой информации (обширные акватории, наличие неблагоприятных погодных условий и т. д.), возможно только для отдельных локальных районов акваторий, причем получаемые ряды в силу изложенных причин будут заведомо неэквидистантны. По средним декадным картам ледовых условий оценивались декадные значения занятых льдом площадей определенных участков акватории (ледовитости), выделялись области с заданными ледовыми условиями и оценивались их площади, определялись значения различных ледовых характеристик. Для численного представления полей ледовых характеристик акватории морей разбивались на ряд сравнительно однородных районов. Использовались осредненные в рамках этих районов значения ледовых элементов, отнесенных к центрам соответствующих районов. Степень детализации сведений о ледовых условиях в данном случае напрямую зависит от размеров элементарных ячеек сетки, которыми покрывается акватория моря для снятия значений ледовых характеристик. В прибрежных зонах, наиболее интересных с точки зрения их хозяйственного освоения, площади районов для снятия ледовых характеристик обычно уменьшались.

В результате для Японского моря была сформирована информационная матрица размерностью $M \cdot P \cdot K$, где M – количество декад, K – размерность пространственной сетки для задания параметров ($K = 114$), а P – количество фиксируемых для данного моря ледовых параметров. В каждом выделенном районе фиксировались значения общей сплоченности ледяного покрова S (выражается отношением занятой льдом площади к общей площади района акватории), его преобладающей толщины льда (возраста) h и преобладающего размера льдин (формы) F . Численные значения сплоченности S и форм льдин F снимались непосредственно с ледовых карт в абсолютных и условных (баллах) единицах.

Период наблюдений составил 29 лет: с 1961 по 1989 г. Именно для указанного периода имеется исчерпывающая и однородная статистическая выборка, составленная на основании результатов регулярных авиаразведок и характеризующая состояния ледяного покрова. Более ранние наблюдения в связи с их исходной неполнотой и низким качеством в выборку не включались. Сведения о ледяном покрове начиная с 1990 г. основаны преимущественно на спутниковых снимках и с целью сохранения однородности выборки на этом этапе также не рассматривались. Вся используемая терминология и обозначения соответствуют «Международной символике для морских ледовых карт и номенклатуре морских льдов» [52]. Расположение и нумерация узлов представлены на рис. 2.1 [65], а гистограмма распределения числа наблюдений для каждой из декад – на

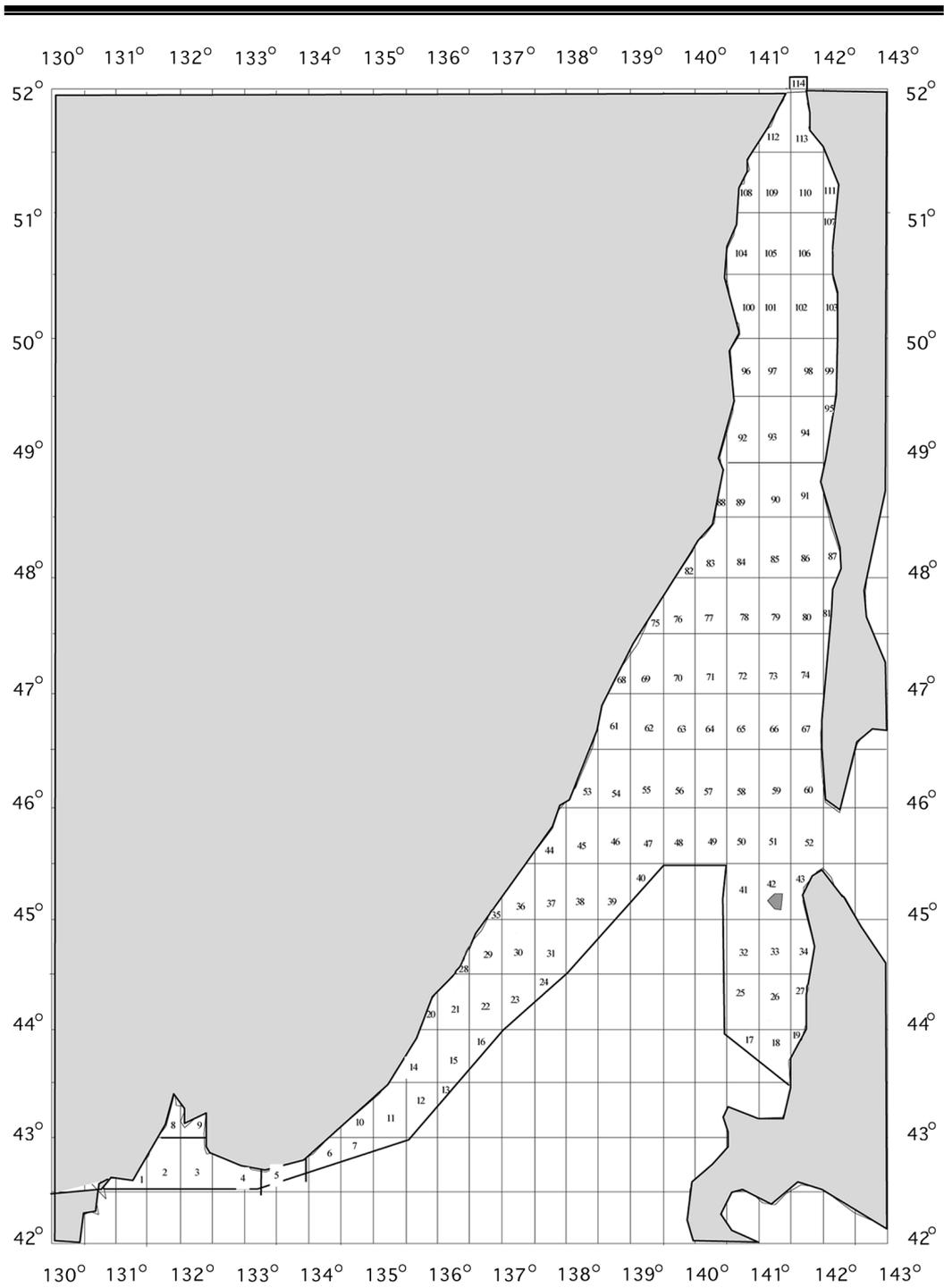


Рис. 2.1. Расположение и нумерация районов для снятия значений ледовых характеристик [65]. Непрерывной линией показана граница максимального распространения льда

рис. 2.2. Ее конфигурация указывает период среднестатистического присутствия ледяного покрова на акватории Японского моря. Наименьшие значения отмечаются в 14, 15, 16 и 31-й декадах: соответствующее число наблюдений в них 31, 28, 7 и 33. Поскольку предметом настоящего рассмотрения являются вопросы как формирования, так и разрушения покрова, то даже эти низкие значения следует учитывать для периода присутствия льда. Итак, в дальнейшем полагается, что он составляет 22 декады.

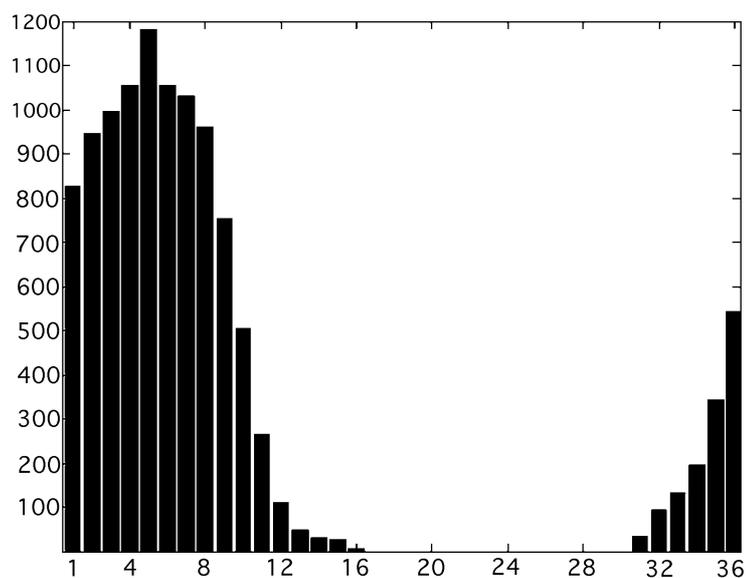


Рис. 2.2. Гистограмма распределения числа наблюдений (по оси абсцисс) для каждой декады (по оси ординат)

В рассматриваемой выборке насчитывается 11 130 подобных наблюдений. Следует отметить, что в 590 наблюдениях некоторая их часть была пропущена, а в 114 случаях и вовсе были пропущены все 3 параметра. Для восстановления пропущенных значений в узлах сетки использовались методы непараметрической регрессии [2, 12, 82, 99]. Выбор именно этих методов обусловлен прежде всего следующими обстоятельствами. Статистический анализ структуры выборки указывает на отсутствие значимых линейных зависимостей как между отдельными параметрами, так и между их линейными комбинациями. Если бы такая зависимость присутствовала, то для восстановления пропущенного значения следовало бы подставить в соответствующее линейное регрессионное уравнение присутствующие в наблюдении параметры. Однако низкие значения этих коэффициентов не позволяют использовать для восстановления пропущенных значений аппарат линейной регрессии (максимальный коэффициент корреляции равен 0,283 и был отмечен только между толщиной покрова H и замеченным преобладающим размером отдельных льдин F).

Анализ соответствующих парных и трехмерных графиков также указывает на отсутствие взаимосвязи между параметрами ледяного покрова. При данных условиях наиболее естественным способом восстановления пропущенных значений являются методы непараметрической регрессии.

Формулировка задачи непараметрической регрессии состоит в том, что по значениям функционала на некотором случайном множестве точек (узлах нерегулярной сетки) восстановить значение функционала на другом заранее заданном и достаточно «плотном» множестве точек этой области [2]. Поставленная задача, в особенности для двумерно распределенных узлов с произвольной формой границы (не исключаются многосвязанные области), оказывается далеко не тривиальной. Свидетельством этому является, в частности, существование большого числа методов интерполяции, ориентированных в конечном итоге на идентичные ситуации [12, 82]. В общем случае оценка Y в точке X определяется согласно выражению:

$$Y(X) = \sum_{X_i \in O(X)} \omega(X_i, X) Y_i / \sum_{X_i \in O(X)} \omega(X_i, X),$$

где $O(X)$ – непустая окрестность точки $X \subset R^n$, $\omega(X_i, X)$ – неотрицательная весовая функция (например, $\omega(X_i, X) = \|X_i - X\|^{-1}$). В правой части выражения суммирование выполняется по всем выборочным точкам $X_i \in O(X)$. В подобной постановке задач непараметрической регрессии открытым остается вопрос о способе построения окрестности этой точки. В практических приложениях в качестве ее окрестности выступают k наиболее близких к ней исходных точек, где k – заданное исследователем число. Заметим, что в случае большого числа исходных точек для решения задачи интерполяции требуется существенное время: среди всех узлов исходной сетки для каждой точки X требуется определить k ближайших. Специфика настоящих наблюдений также состоит в том, что исходная выборка содержит 8 типов наблюдений: для первого типа отсутствуют пропущенные значения; для второго типа – значение сплоченности S ; для третьего – толщина H ; для четвертого – форма льдины F . Остальные пять типов содержат пропущенные значения комбинаций этих параметров. Поэтому в зависимости от числа пропущенных в определенном наблюдении параметров значение n варьирует от 4 (пропущены все 3 значения, и в наблюдении содержатся год и номер декады, пространственные координаты узла) до 7 (отсутствие пропущенных значений). При этом наблюдения каждого типа представляют собой выборочную точку пространства соответствующей размерности, а задача непараметрической регрессии сводится к оценке числа и состава сгущений в этом пространстве. Тогда окрестностью точки $X_i \in O(X)$ является совокупность наблюдений (где присутствуют все параметры) из ближайшего к точке X_i сгущения. С целью выявления сгущений для подобного рода задач целесообразно использовать рекурсивный метод отображения точек многомерного пространства с помощью кривых Пеано [81, 4], который обладает высоким быстродействием и характеризу-

ется высокой надежностью [5, 106, 100, 109, 104]. Непосредственное восстановление осуществляется в исходном n -мерном пространстве на основании совокупности точек из построенной подобным образом окрестности.

Исходные метрические параметры состояния ледяного покрова представлены баллами соответствующих ординальных шкал [52]. В частности, ординальная шкала сплоченности насчитывает 10 градаций, толщин – 6 градаций и размеры льдин – 7 градаций. Поэтому непосредственное наблюдение содержит сведения о конкретных диапазонах изменения параметров, где присутствуют их истинные значения. Очевидно, что совокупность подобного типа данных для отдельного района акватории и конкретной осредненной декады характеризует гистограмму, или распределение частот появления каждого из интервала значений. Чтобы получить указанные распределения, следует суммировать информацию по той части выборки, которая соответствует именно этому району. Выполнение данной процедуры позволяет сформировать выборку совокупности статистического распределения сплоченности, статистического распределения толщины и статистического распределения размера льдин для каждого из представленных на рис. 2.1 районов акватории. Результатом подобной трансформации исходных данных является выборка многомерных наблюдений. Каждое отдельное наблюдение насчитывает 24 признака: первый из них указывает частоту случаев отсутствия ледяного покрова в этом непосредственном районе акватории для рассматриваемой декады; признаки со 2-го по 11-й характеризуют распределение сплоченности, с 12-го по 17-й – распределение толщин и с 18-го по 24-й – распределение размера льдин. Общее число таких наблюдений составило 799 реализаций. Поскольку функция распределения содержит основные сведения о характере изменения случайной величины (наблюдаемые значения сплоченностей, толщин и размеров льдин), то указанное преобразование позволяет выявить многолетнюю тенденцию эволюционного процесса. Для оценки численных значений следует использовать принципы статистического моделирования. При этом важен факт равновероятности принятия параметром отдельного значения из диапазона, соответствующего наблюдаемому баллу ординарной шкалы. Для оценки динамики площадей льда различных толщин следует сформировать соответствующее признаковое пространство, размерность которого равна произведению числа градаций размера отдельных льдин на число градаций толщин.

Для описания эволюции ледяного покрова Японского моря использован расширенный архив наблюдений надледной скорости ветра на 10-метровой высоте и температуры надледного слоя воздуха на высоте 2 м в соответствующих районах за весь период присутствия льда с 1961 по 1989 г. Промежуток времени между измерениями составил 12 ч. Указанные архивы за обозначенный период характеризуют температуру надледного слоя воздуха, скорости ветра для всей акватории Японского моря. Архивы данных были любезно предоставлены нам сотрудниками Дальневосточного гидрометеорологического института (г. Владивосток).

2.1.2. Оцифровка балльных оценок параметров состояния покрова

В практике исследования ледяного покрова в качестве его параметров состояния обычно выступают декадные значения сплоченности S , толщины покрова h и преобладающий размер льдин F в каждом из выделенных сравнительно однородных по ледовым условиям районов моря [65, 104]. Поскольку S представляет собой отношение общей площади льда в районе к его площади, то она является безразмерной величиной; h и F измеряются в метрах. Для статистического исследования использовалась многолетняя выборка, которая характеризует значения показателей в баллах порядковых шкал измерений (согласно [52], границы соответствующих диапазонов определяются фиксированными наборами чисел $\{S_i^{(T)} : S_i^{(T)} = i/10\}_{i=0+10}$, $\{h_i^{(T)}\}_{i=0+6}$, $\{F_i^{(T)}\}_{i=0+7}$ и $S_0^{(T)} = h_0^{(T)} = F_0^{(T)} = 0$). Период наблюдений – с 1961 по 1989 г. Именно для этого периода имеется исчерпывающая и однородная выборка независимых наблюдений, составленная на основании результатов регулярных авиаразведок и характеризующая состояния ледяного покрова.

Вычисление элементарных статистик для d -й декады r -го района следует выполнить на основании методики формирования исходных наблюдений: оцифрованное балльное значение каждого параметра в рамках его определенной градации (оно обозначается символом измеряемого параметра) есть равномерно распределенная случайная величина (с. в.). Полагаются статистическая состоятельность оценок и их непрерывность как функций случайных аргументов [70]. Вследствие чего допускается линеаризация оценок в окрестности математического ожидания (м. о.) аргументов. В этом случае выборочное среднее и выборочная дисперсия некоторой функции $X = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определяются соотношениями

$$\bar{X} \approx \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \text{ и}$$

$$\sigma^2(X) \approx \sum_{k=1}^n (\partial\varphi/\partial x_k)^2 \sigma^2(x_k) + \sum_{k=1}^n \sum_{l=k+1}^n (\partial\varphi/\partial x_k)(\partial\varphi/\partial x_l) \text{cov}(x_k, x_l),$$

где частные производные вычисляются в точке м. о.; $\text{cov}(x_k, x_l)$ – выборочная ковариация между x_k и x_l . В случае, когда переменная x_k является равномерно распределенной на полуинтервале $(x_{k-1}^{(T)}, x_k^{(T)})$ с. в., то, как известно, ее м. о. и дисперсия определяются выражениями: $E(x_k) = (x_{k-1}^{(T)} + x_k^{(T)})/2$ и $\sigma^2(x_k) = (x_k^{(T)} - x_{k-1}^{(T)})^2/12$. Для выборочной оценки сплоченности аргументами являются набор $\{S_i\}_{i=1+10}$ и набор $\{p_{dri}^{(S)}\}_{i=1+10}$ частот встречаемости площади льда с i -м баллом сплоченности. Тогда

$$E(S_{dr}) \approx \sum_{i=1}^{10} E(p_{dri}^{(S)}) E(S_i)$$

$$\sigma^2(S_{dr}) \approx \sum_{i=1}^{10} \left[E^2(S_i) \sigma^2 + E^2(p_{dri}^{(S)}) \sigma^2(S_i) - E(S_i) E(p_{dri}^{(S)}) \sum_{i=1}^{10} [E(S_j) E(p_{drj}^{(S)}) / (n_d - 1)] \right],$$

где $E(\bar{p}_{dri}^{(S)})$ – выборочная оценка средней частоты встречаемости, выборочная дисперсия которой $\sigma^2(p_{dri}^{(S)})$; n_d – общее число наблюдений для d -й декады (для наблюдений осеннего сезона это число равно 28, для наблюдений остальных сезонов – 29). Действительно, с. в. $S_i (i = 1 \div 10)$ не зависит от частоты ее встречаемости. Поэтому $\text{cov}(p_{dri}^{(S)}, S_i) = 0$. Кроме того, согласно методике проведения наблюдений 10-элементный набор появления льда различных сплоченностей в каждом наблюдении имеет только один ненулевой элемент. Тогда для $i \neq j$ $\text{cov}(p_{dri}^{(S)}, p_{drj}^{(S)}) = -E(p_{dri}^{(S)}) E(p_{drj}^{(S)}) / (n_d - 1)$. Оценки выборочных средних и выборочных дисперсий для толщин льда h_{dr} и преобладающих размеров льдин F_{dr} записываются аналогичным образом:

$$E(F_{dr}) \approx \sum_{i=1}^6 E(p_{dri}^{(F)}) E(F_i),$$

$$\sigma^2(E_{dr}) \approx \sum_{i=1}^7 \left[E^2(F_i) \sigma^2(p_{dri}^{(F)}) + E^2(p_{dri}^{(F)}) \sigma^2(F_i) - E(F_i) E(p_{dri}^{(F)}) - \sum_{j \neq i}^7 E(F_j) E(p_{drj}^{(F)}) / (n_d - 1) \right],$$

$$E(F_{dr}) \approx \sum_{i=1}^6 E(p_{dri}^{(F)}) E(F_i),$$

$$\sigma^2(E_{dr}) \approx \sum_{i=1}^7 \left[E^2(F_i) \sigma^2(p_{dri}^{(F)}) + E^2(p_{dri}^{(F)}) \sigma^2(F_i) - E(F_i) E(p_{dri}^{(F)}) - \sum_{j \neq i}^7 E(F_j) E(p_{drj}^{(F)}) / (n_d - 1) \right].$$

Здесь $E(p_{dri}^{(h)})$ – выборочная оценка средней частоты встречаемости отдельных льдин с i -м баллом толщины, $\sigma^2(p_{dri}^{(h)})$ – ее дисперсия; $E(p_{dri}^{(F)})$ – выборочная оценка средней частоты встречаемости отдельных полей льда с i -м баллом преобладающего размера льдин, $\sigma^2(p_{dri}^{(F)})$ – ее дисперсия. Вследствие существенного превышения масштабов S и h при анализе используется логарифмическая шкала ее измерений. Обоснованность подобных преобразований обусловлена тем обстоятельством, что для реальных ситуаций важен поиск зависимостей не

только между исходными параметрами, но также между их некоторыми монотонными функциями.

2.2. ДИНАМИКА ЛЕДОВИТОСТИ ЯПОНСКОГО МОРЯ

Для ледяного покрова замерзающих морей существует принятый в практике исследований набор интегральных показателей, характеризующих его как объект определенной целостности. К числу основных из них относятся усредненные по районам акватории суммарные площади (ледовитость моря) и объемы льда. Обычно на практике площадь льда в районах акватории измеряется в долях от его общей площади. Изучение временных изменений этих величин за период присутствия на акватории моря льда способствует количественному описанию интегральных тенденций процессов накопления и разрушения ледяного покрова, а рассмотрение их межгодовых колебаний – выявлению латентных (скрытых) периодичностей для процессов взаимодействия в системе атмосфера–ледяной покров–гидросфера. Повышенный интерес к указанной проблеме обусловлен изучением основных причин колебаний, которые, по-видимому, имеют планетарный характер. Актуальность решения указанных вопросов обусловлена также практическими потребностями для разработки долгосрочных прогнозов, в частности для нужд мореплавания и обеспечения деятельности предприятий и ведомств.

Динамика декадных значений ледовитости моря за 1961–1989 гг. представлена на рис. 2.3,А, следуя которому распределение ледовитости характеризуется нерегулярным чередованием пиков и впадин. Отмечается явное превышение над остальными значениями ледовитости в 4-й декаде 1985 г. – 0,348. Этот год, в общем, отличается от остальных пониженной температурой в осенне-зимний период: декадная температура предыдущих периодов 2-метрового слоя воздуха в некоторых районах акватории опускалась ниже -36 °С. Пониженные значения ледовитости моря отмечаются в 1963 г. – наибольшее значение (0,147) приходится на 5-ю декаду (температура воздуха предыдущих декад этого года не опускалась ниже -20 °С). Аналогичная картина наблюдается и для объемов льда. Достаточно отметить, что коэффициент корреляции между распределениями равен 0,838. И это очевидно, поскольку площадь является одной из его составляющих. Однако отличие его от единицы указывает на наличие определенных несовпадений. В частности, площадь на этапе зрелого состояния покрова не изменяется, а объемы льда эволюционируют вследствие роста толщины.

При изучении многолетних колебаний ледовитости наблюдаются циклы 2–3, 3–4, 4–5, 7–9, 9–10, 11–13, 18–19-летней продолжительности [14, 27, 30, 39, 47]. Замечено, что эти колебания обусловлены совокупным воздействием периодических и нерегулярных процессов. Для выявления первых составляющих по выборке значений ледовитости целесообразно использование техники цифрового спектрального оценивания. Следуя формализму спектрального оценивания и согласно оценке спектра мощности рис. 2.3,Б, можно сделать вывод, что в мно-

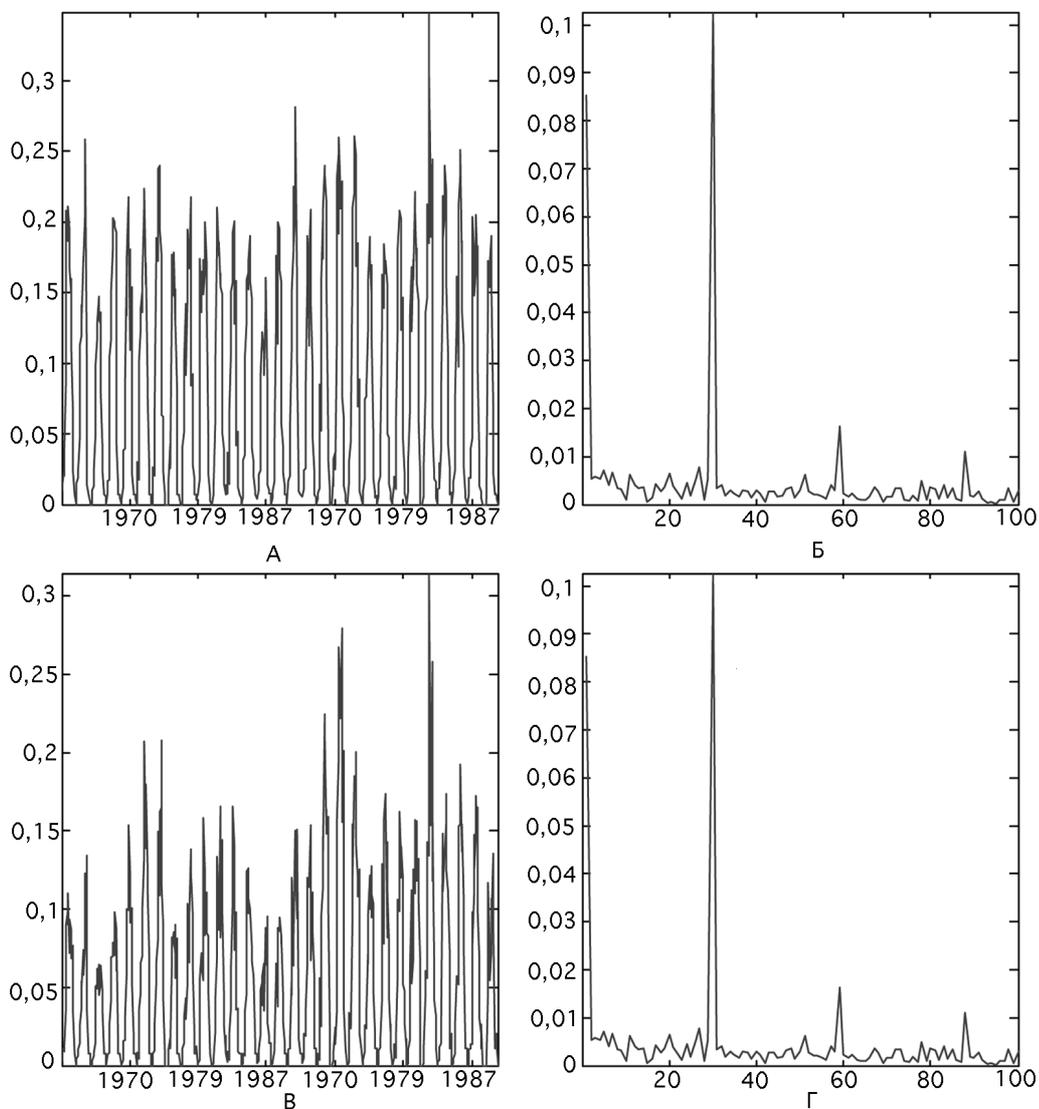


Рис. 2.3. Динамика ледовитости (А), объемов льда (В) и их спектр мощности (Б, Г). Пояснения см. в тексте

голетней динамике ледовитости Японского моря выделяются 3 периодические составляющие. Первая из них соответствует годовому циклу, или периоду обращения Земли вокруг Солнца, вторая – общему времени присутствия покрова на акватории моря (полугодие) и третья – менее ярко выраженная сезонная составляющая. Последняя и обуславливает осеннее формирование покрова, его достаточно стабильное зимнее состояние и весеннее разрушение.

Выделенные 3 составляющие обуславливают более 85 % дисперсии многолетней ледовитости. Влиянием остальных на динамику ледовитости можно пре-

небрежь, согласно рассматриваемой здесь выборке и результатам спектрального оценивания. Представляется, однако, что при детальном рассмотрении динамики ледовитости (рис. 2.3, А) можно выделить, по крайней мере, три нерегулярные обособленные группы. Их границы идентифицируются наличием впадины между двумя последовательными максимальными значениями. Причина, по которой спектральный анализ «не замечает» их присутствия, заключается в следующем. При его проведении полагаются регулярное протекание хода процесса и наличие в используемой выборке выраженных именно периодических последовательностей. Реальное же распределение имеет явный квазипериодический характер, и для выявления циклов указанными средствами требуется выборка существенно большего объема. С другой стороны, методология используемой оценки (применение различного типа цифровых фильтров [8, 48]) позволяет выявить и ряд других периодических составляющих. Но тут возможны ситуации, когда полученные результаты не соответствуют действительности и отражают свойства, «навязанные» системе в результате формального использования аппарата исследований.

Как правило, изучаемые фактические выборки имеют недостаточные для выявления продолжительных циклических последовательностей объемы. Поэтому для оценки фактической последовательности циклов и их числа полезным является использование различных способов удобного визуального представления многомерных наблюдений в некотором пространстве существенно меньшей размерности, ряда интегральных показателей и арсенала методов анализа данных, свободных от ограничений объемов выборок. Следует отметить, что использование ряда дополнительных характеристик (максимальных значений ледовитости или объемов льда, средних значений и т. д.) не решает задачи определения истинной размерности процесса, порождающего исходные данные. Действительно, они описывают лишь некоторые стороны рассматриваемого процесса, а не характеризуют совокупность декадных значений за год. В такой постановке задача выявления периодических последовательностей трансформируется в задачу изучения структуры распределения выборочных точек (наблюдений, объектов) в исходном 22-мерном пространстве декадных значений ледовитости. Сведения об этой структуре позволяют оценить конфигурацию выборочных точек в пространстве агрегированных или интегральных показателей (ИП), размерность которого существенно меньше размерности исходного пространства [3, 5, 99, 100]. Методы данного класса выполняют нелинейное преобразование исходных признаков таким образом, чтобы матрицы близости между парами объектов в исходном пространстве и в пространстве ИП имели несущественные отличия. Непосредственное построение ИП и выполняется посредством минимизации этих отличий. Использование ИП позволяет выполнить качественно иной уровень обобщения, чем использование исходных распределений (здесь статистический объект есть совокупность декадных значений геометрического параметра для отдельного года). В частности, с их помощью эффективно решаются задачи классификации объектов [4, 100]. Тогда анализ числа классов и состава их участников способствует оценке числа периодических составляющих.

Разумеется, что для решения подобного класса задач выборка должна насчитывать по крайней мере несколько оцениваемых периодов наблюдений.

Для изучения структуры выборки использовались результаты иерархической классификации (рис. 2.4). При построении первого дерева (А) в качестве объектов наблюдений выступают значения ледовитости для отдельных декад, а его признаками – совокупность многолетних значений в этой декаде. По оси абсцисс деревьев отложены значения меры близости (евклидова метрика) между соответствующими объектами и некоторыми промежуточными величинами, вычисляемыми при их построении; по оси ординат – декады (рис. 2.4, А) и годы наблюдений (рис. 2.4, Б). Во втором случае объектом является распределение ледовитости отдельных лет. В обоих случаях используется матрица размерности 22×29 , строки и столбцы которой подлежат дальнейшему анализу. Конфигурация ветвей дерева А подтверждает неразличимость распределений осенних и весенних этапов. Действительно, результат классификации указывает на наличие двух ветвей. Одна из них содержит только осенне-весенние декады, а другая – только зимние (с 1-й по 9-ю декады). Окончания осеннего (36-я декада) и зимнего (10-я декада) этапов являются пограничными. Конфигурация ветвей дерева Б менее симметричная. Временные периоды для наиболее близких между собой пар распределений охватывают: 4 года (1972–1975), 10 лет (1973–1982), 12 лет (1963–1974 и 1967–1978) и 22 года (1968–1989). Детальный анализ структуры дерева показывает, что в его верхней части (с 1968 г. и выше) присутствуют распределения с повышенными значениями, а в нижней (с 1961 г. и ниже) – с пониженными значениями ледовитости.

Иерархические бинарные деревья на рис. 2.4 и 2.5 характеризуют основную тенденцию распределения выборочных точек в исходном 22-мерном пространстве декадных распределений. В этом смысле нумерация конечных ветвей дерева не позволяет оценить реальное пространственное расположение наблюдений, которые принадлежат его другим бинарным ветвям. Оценку же периодических составляющих целесообразно выполнить в пространстве первых двух ИП для рассматриваемой системы признаков, а их предметную интерпретацию естественно определить в терминах исходных признаков (точка с номером i соответствует наблюдениям $1960+i$, на рис. 2.5, В выделены точки начального (1) и конечного (29) годов наблюдений). Прежде всего, заметим, что крайние положения на рис. 2.4, В занимают наблюдения 1963–1974 и 1985 гг. для первого ИП (ИП₁), а для второго ИП (ИП₂) – 1980 и 1969–1984 гг.

Детальное рассмотрение распределений для этих лет показывает:

1. Наименьшее значение ледовитости зрелого состояния покрова отмечается в 1963 и 1974 гг., а наибольшее – в 1985 г.;

2. Наибольшее разнообразие декадных распределений (дисперсия) отмечается в 1969 и 1984 гг., а наименьшее – в 1980 г.

Таким образом, ИП₁ характеризует разнообразие ледовитости зрелых состояний покрова, на это указывает высокий коэффициент корреляции с макси-

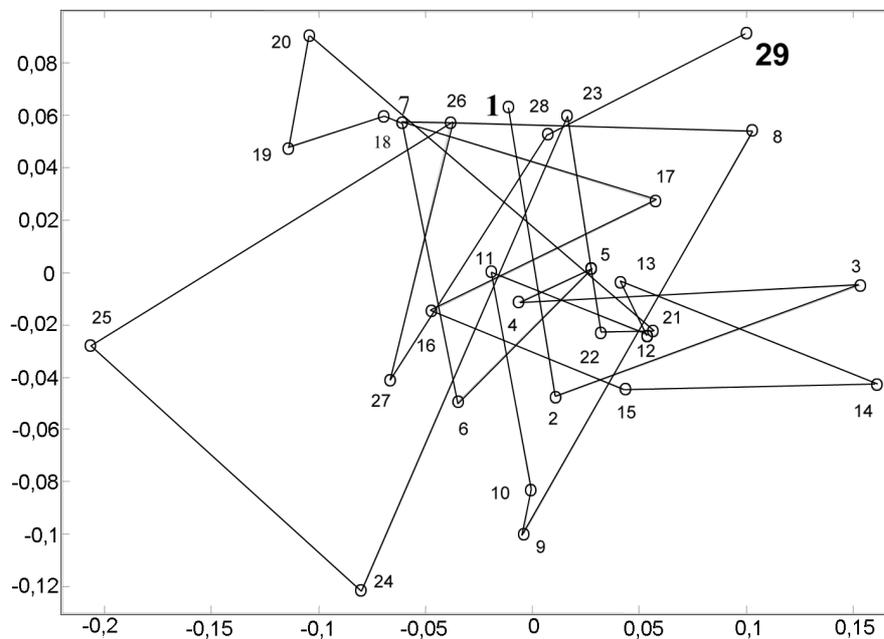
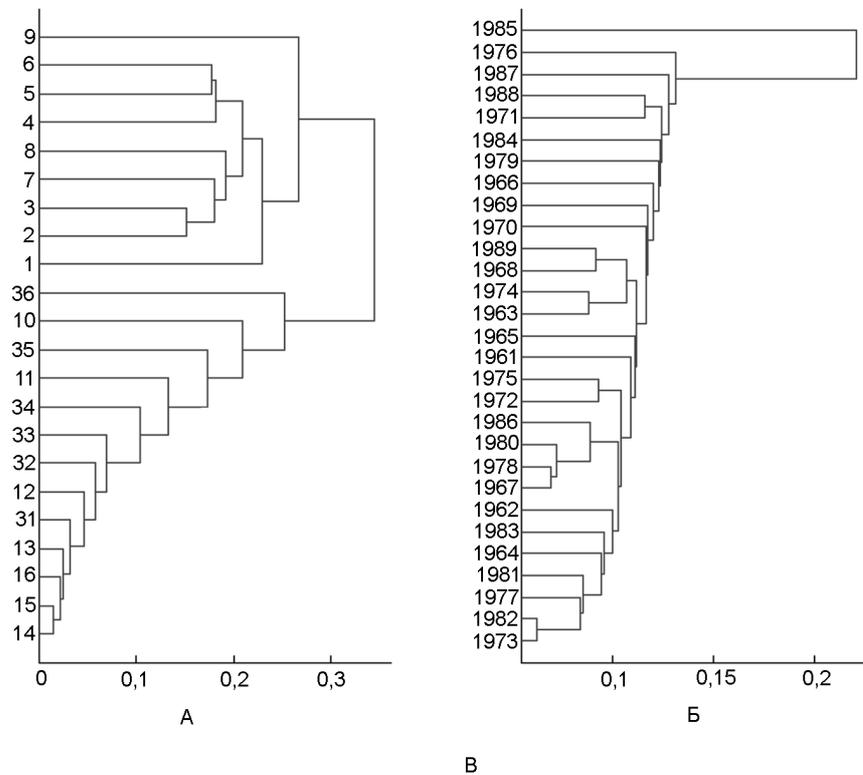


Рис. 2.4. Иерархические бинарные деревья классификации наблюдений ледовитости (А, Б) и распределение наблюдений на плоскости первых двух ИП (В). Пояснения см. в тексте

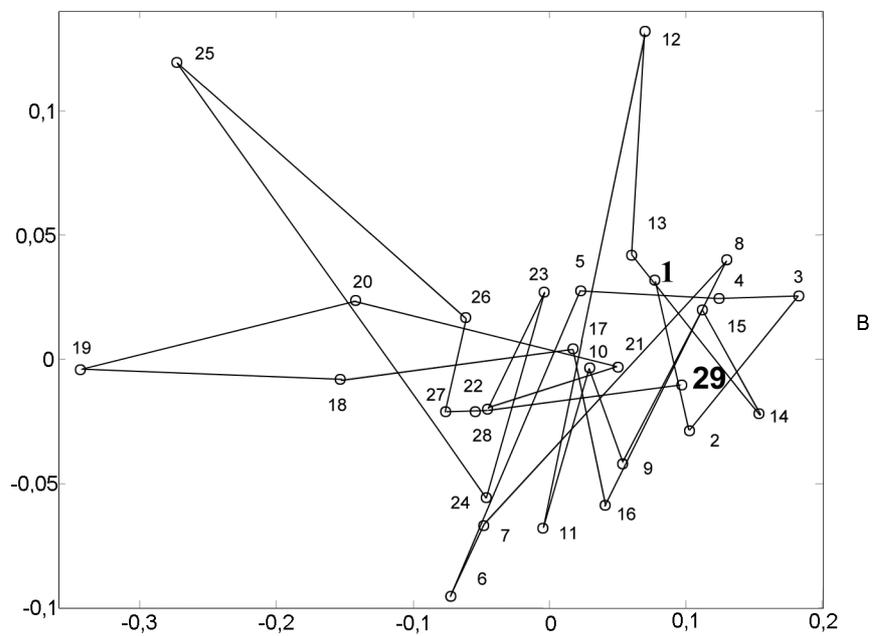
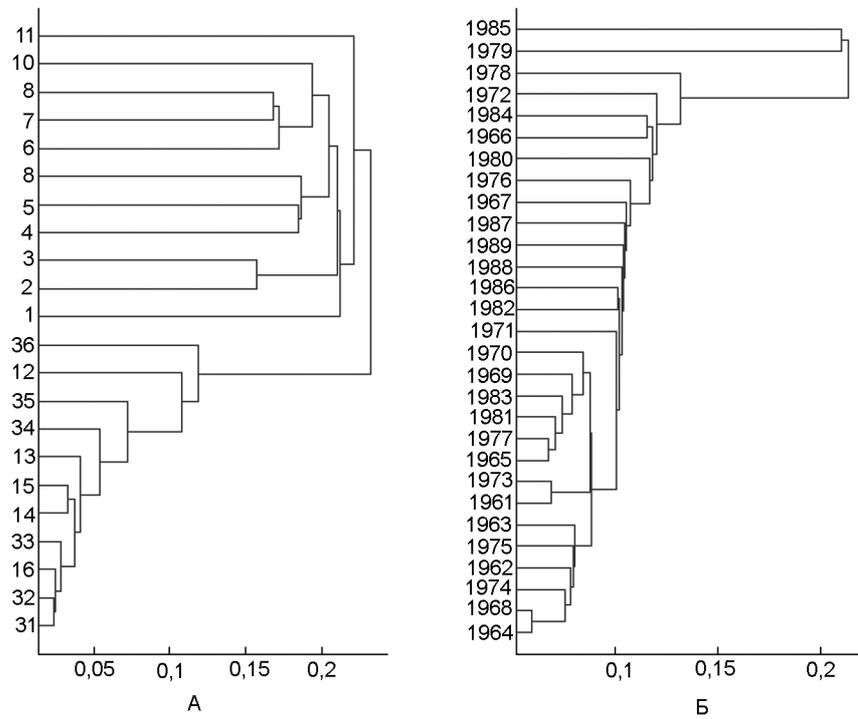


Рис. 2.5. Иерархические бинарные деревья классификации наблюдений объемов льда (А, Б) и распределение наблюдений на плоскости первых двух ИП (В). Пояснения см. в тексте

мальной ледовитостью отдельных лет ($-0,921$), а $ИП_2$ – дисперсию распределений отдельных лет. Кроме того, поскольку конечные наблюдения локально расположены в окрестности начального 1961 г. и при настоящем проецировании теряется всего 15 % информации о матрице близости пар распределений, то их совокупность в 22-мерном пространстве лежит в его ограниченном компактном подпространстве существенно меньшей размерности. Искажение здесь измеряется отношением максимальных значений близости пар в проецированном и исходном пространствах, которое достаточно часто используется в подобных задачах [25, 99].

Спектральный анализ $ИП_1$ и $ИП_2$ свидетельствует о том, что наибольшие амплитуды (0,03818 и 0,04042) соответствуют 1–2-летним и 14–15-летним циклическим последовательностям. Статистическая оценка значимости их присутствия может быть выполнена на основании расчетов функции взаимной корреляции между распределениями отдельных лет. Оказывается, что ее максимумы приходятся именно для указанных значений запаздывания.

Применение вышеописанной процедуры анализа декадных распределений ледовитости к выборке декадных распределений объемов льда приводит к аналогичным результатам. В частности, наибольшие амплитуды (0,06497 и 0,08652) соответствуют 1–2-летним и 14–15-летним циклическим последовательностям, и они статистически значимы. Этот факт достаточно понятен: распределения в обоих случаях формировались на основании значений сплоченности. При этом коэффициент корреляции между $ИП_1$ для ледовитости и первым $ИП$ для объемов льда равен 0,839. Однако дополнительный учет толщин покрова приводит к более выраженной форме 11–15-летней периодической составляющей. Остальные различия несущественны.

Таким образом, полученные результаты указывают на следующие факты. Ледовитость Японского моря насчитывает две периодические составляющие. Первая из них обусловлена вращением Земли вокруг Солнца, а присутствие второй составляющей естественно связать с 11-летним циклом солнечной активности.

2.3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

Реализация ранее описанной процедуры трансформации совокупности многолетних наблюдений в соответствующую совокупность многомерных наблюдений позволяет построить выборку, которая характеризует ледяной покров как определенную статистическую систему. В этом случае набор отдельных декадных наблюдений для всех районов акватории является статистическим описанием многофакторного динамического состояния покрова в отдельный момент времени. В данном случае полагается, что в рамках отдельного района усреднение по времени характеризует в этом районе пространственное состояние его покрова.

При исследовании подобных многокомпонентных систем актуальной является проблема оценки числа ее состояний и выявления их пространственного расположения, а также наличия изолированных сгущений точек (кластеров) в соответствующем признаковом пространстве. Если следовать терминологии статистической теории распознавания образов [92], она относится к классу задач классификации образов. Важной также является задача адекватного представления совокупности признаков посредством небольшого набора агрегированных показателей и визуализации в этом пространстве конфигурации выборочных точек, а также интерпретация последних в терминах исходных признаков. Следует отметить, что в настоящем контексте состояние системы эквивалентно понятию изолированного сгустка выборочных точек, или кластера, а аналогом многомерного наблюдения является точка соответствующего признакового пространства, или образ вектора многолетних наблюдений.

Из перечисленных выше проблем одной из основных является оценка конфигурации выборочных точек в исходном признаковом пространстве. Именно подобным образом возможно выявить число и порядок пространственного следования этапов эволюции динамических систем произвольной природы, представленных выборкой многомерных наблюдений [99]. При его существенной многомерности для решения данного класса задач следует придерживаться определенной последовательности применения комплекса методов анализа данных. В частности, для выявления конфигурации наблюдений первоначально используются методы многомерного шкалирования, а затем – методы, позволяющие установить иерархию ответственных за выявленную конфигурацию исходных признаков и их комбинаций. В этом случае первый набор методов используется для автоматической классификации, или классификации без учителя, когда при классификации отсутствует обучающая, или эталонная, выборка уже классифицированных наблюдений. Методы же второго класса предназначены для оценки «качества» разбиения на классы и интерпретации полученных результатов.

Сведения о функциях распределения детально характеризуют статистический портрет исследуемой системы. В большинстве случаев для решения практических задач столь подробное описание не используется. Тогда для изучения особенностей процесса применяются первые статистические моменты распределения [70, 87, 106]. В частности, характер пространственно-временного изменения переменных можно оценить посредством анализа их совместной динамики.

2.3.1. Оценка конфигурации выборочных точек

Конструктивным основанием методов многомерного шкалирования является указание типа критерия качества метода, или типа функционала, результат вычисления оптимума которого позволяет получить интегрированное описание данных, упрощая исходное описание, и одновременно сводит к минимуму поте-

рянную информацию [54]. В пространстве построенных агрегированных показателей существенно проще выявить конфигурацию выборочных точек признакового пространства, а содержательная интерпретация результатов позволяет указать особенности механизма эволюции.

Разделение функционалов по определенным типам обусловлено многообразием конфигураций выборочных точек и, следовательно, многообразием накладываемых на агрегированные показатели требований, которым последние должны удовлетворять. Например, можно потребовать построения агрегированных показателей с максимальной дисперсией. При линейном способе их построения результатом решения задачи многомерного шкалирования являются главные компоненты (ГК) признакового пространства. В этом случае первая ГК (ГК₁) представляет собой линейную комбинацию исходных переменных с коэффициентами, равными нормированному характеристическому вектору, который соответствует наибольшему характеристическому корню ковариационной матрицы. Конструкция второй ГК (ГК₂) аналогичная – коэффициентами являются элементы характеристического вектора, соответствующего второму по величине характеристическому корню той же матрицы и т. д. Важными свойствами совокупности ГК являются их линейная независимость и следующее: 1) поскольку выборочная ковариационная матрица является положительно определенной, то все характеристические корни положительны; 2) сумма характеристических корней равна следу матрицы ковариации, а произведение – ее определителю. Если ГК оцениваются на основании корреляционной матрицы, то сумма характеристических корней равна размерности признакового пространства. Перечисленные выше особенности построения ГК используются для оценки их «важности». Например, выраженное в процентах отношение характеристического корня к их сумме указывает долю общей дисперсии, которую эта ГК объясняет.

Разбиение периода присутствия ледяного покрова на отдельные этапы обусловлено естественными обстоятельствами: эволюция ледяного покрова подразделяется на этап его формирования, зрелое состояние и этап термического разрушения покрова. Последовательность следования этапов отражает переход покрова из одного его состояния в другое, где пространственно-временное состояние покрова характеризуется совокупностью его геометрических параметров в каждом районе акватории. Таким образом, указанное состояние ледяного покрова акватории моря определяется вектором, размерность которого равна 47 880 (114·10·6·7) элементов. Для выявления последовательности изменения состояний использовалась процедура иерархической классификации, результаты которой представлены на рис. 2.6 (в качестве меры близости используется евклидова метрика). Как следует из рис. 2.6, состояния зимнего сезона (1÷8) составляют отдельный кластер. Группа состояний с номерами 36, 9, 10 и 11 является, по видимому, переходной между сезонами.

Согласно полученным результатам для дальнейшего изучения покрова используется такое разбиение декад на сезоны: осенний – с 31-й по 36-ю; зимний –

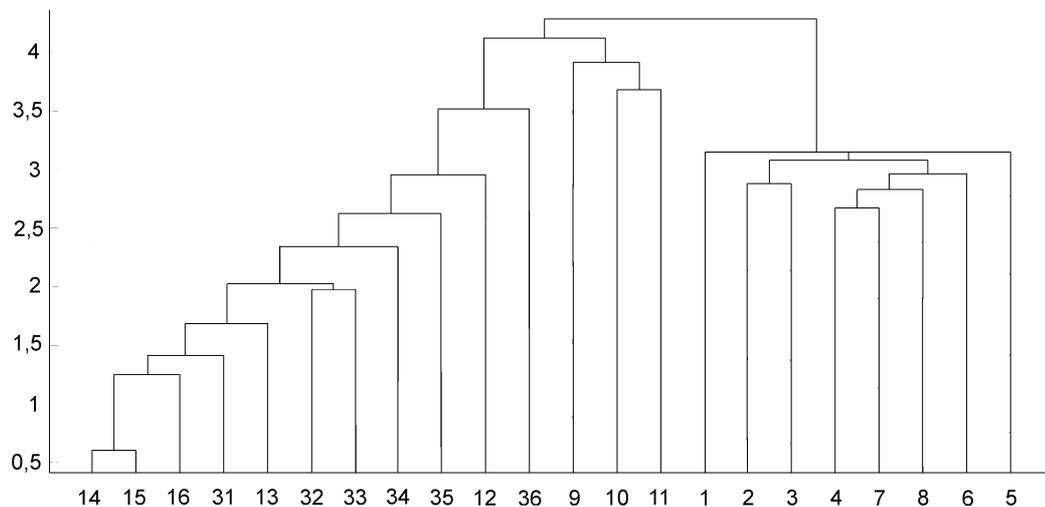


Рис. 2.6. Распределение декадных состояний ледяного покрова Японского моря (по оси абсцисс – номера декад, по оси ординат – значение меры близости состояний)

с 1-й по 10-ю; весенний – с 11-й по 16-ю. В соответствии с указанным разбиением в дальнейшем на рисунках выборочные точки осеннего сезона (141 наблюдение) маркируются треугольниками, зимнего сезона (593 наблюдения) – точками, а весеннего (65 наблюдений) – кружками.

Результаты применения метода многомерного шкалирования как для наборов частот встречаемости отдельных признаков $\{\bar{P}_{dri}^{(S)}\}_{i=0 \div 10}$, $\{\bar{P}_{dri}^{(h)}\}_{i=0 \div 6}$, $\{\bar{P}_{dri}^{(F)}\}_{i=0 \div 7}$, так и всей их совокупности $\{\bar{P}_{dri}^{(S,h,F)}\}_{i=0 \div 24}$ представлены на рис. 2.7. В качестве начального приближения использовались результаты метода главных компонент, а в качестве меры близости – евклидова метрика. Ниже приводится анализ распределения выборочных точек на плоскости первых двух интегрированных показателей (и. п.) $\{X_1, X_2\}$ для каждого из случаев. Для наглядности на рисунках цифрами показаны центры проекций отдельных групп выборочных точек, соотнесенных к осеннему (1), зимнему (2) и весеннему (3) этапам эволюции. Поскольку все признаки имеют один и тот же порядок и являются безразмерными, то ГК вычисляются по ковариационной матрице.

Частоты сплоченности (11 признаков). Признаковое пространство характеризует распределение площадей ледяного покрова. Первый признак, обозначенный в дальнейшем как $p_0^{(S)}$, указывает долю реализаций, где ледяной покров отсутствует (отсутствие льда эквивалентно нулевой сплоченности), остальные – доли присутствия в районах исследования ледяного покрова сплоченности от одного $p_1^{(S)}$ до десяти баллов $p_{10}^{(S)}$. Первый характеристический корень матрицы $\lambda_1 = 0,193$, второй – $\lambda_2 = 0,025$ при общей сумме характеристических корней 0,237. Поэтому ГК₁ объясняет 81 % обобщенной дисперсии, ГК₂ – 10 %, или первые две ГК объясняют 91 % обобщенной дисперсии признаков. Соответст-

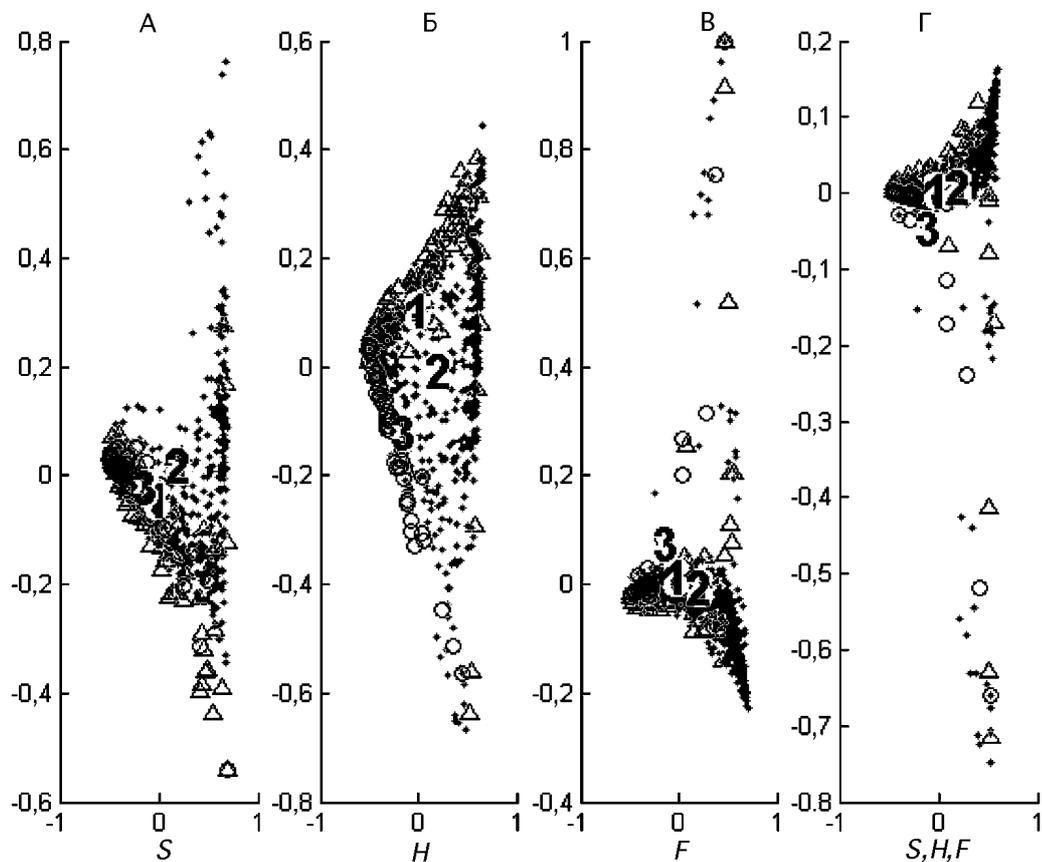


Рис. 2.7. Проекция выборочных точек различных признаков пространств на плоскость первых двух ГК (по оси абсцисс – ГК₁, по оси ординат – ГК₂); наблюдения осеннего (1), зимнего (2) и весеннего сезонов (3), где цифры – средние значения ГК для сезонов

вующие характеристики агрегированных показателей представлены в табл. 2. Значения коэффициентов для X_1 указывают, что ее рост обусловлен возрастанием в районах долей льдов 8–10-балльной сплоченности и уменьшением долей площадей свободной воды. Остальные признаки практически не участвуют в формировании $X_1^{(S)}$ и $X_2^{(S)}$. Поэтому крайние левые точки на рис. 2.7, А соответствуют случаям осеннего начального формирования и весеннего разрушения ледяного покрова, для которых средние значения и. п. обозначены цифрами 1 и 2. Исходная выборка содержит 95 таких наблюдений, которые относятся к 16-й и 22-й декадам. Для них значение первого признака равно 0,966. Рост $X_2^{(S)}$ обусловлен возрастанием в районах площадей чистой воды и убыванием долей льдов 7–10-балльной сплоченности. Поэтому доли последних градаций льда соответствуют наименьшим значениям этой компоненты.

Таблица 2

Результаты многомерного шкалирования

	Сплоченность		Толщина			Размеры льдин		
	ГК ₁ 81 % 0,193	ГК ₂ 10 % 0,025	92 % λ	ГК ₁ 80 % 0,154	ГК ₂ 12 % 0,022	92 % λ	ГК ₁ 77 % 0,155	ГК ₂ 15 % 0,030
	$X_1^{(S)}$	$X_2^{(S)}$		$X_1^{(h)}$	$X_2^{(S)}$		$X_1^{(F)}$	$X_2^{(F)}$
$P_0^{(S)}$	-0,849	0,126	$P_0^{(h)}$	-0,885	0,097	P_{F0}	-0,881	-0,127
P_1^S	-0,003	-0,005	$P_1^{(h)}$	0,002	0,029		0,014	-0,010
P_2^S	0,001	-0,023	$P_2^{(h)}$	0,082	0,199	P_{F2}	0,022	-0,033
P_3^S	-0,006	-0,042	$P_3^{(h)}$	0,329	0,604	P_{F3}	0,033	-0,021
P_4^S	-0,006	-0,027	$P_4^{(h)}$	0,265	0,023	P_{F4}	0,169	-0,141
P_5^S	0,001	-0,045	$P_5^{(h)}$	0,176	-0,732	P_{F5}	0,407	-0,422
P_6^S	0,005	-0,061	$P_6^{(h)}$	0,030	-0,221	P_{F6}	0,122	-0,123
P_7^S	0,026	-0,090	–	–	–	P_{F7}	0,114	0,877
P_8^S	0,093	-0,217						
P_9^S	0,376	-0,459						
P_{10}^S	0,358	-0,842						

Примечание: % указывают на величину объясненной общей дисперсии признаков; λ – собственные числа ковариационной матрицы.

Следует отметить, что распределение наблюдений зимнего этапа согласовано с пространственным распределением ледяного покрова на акватории Японского моря – на его северной части у покрова высокая сплоченность, а на юге сплоченность имеет низкие значения. Разные знаки коэффициентов отражают определенные отношения между собой ледяных образований различных сплоченностей. С одной стороны, ограниченность акватории приводит к их конкурентным отношениям. Достаточно отметить, что коэффициенты корреляции принимают значения: $r(p_0^{(S)}, p_8^{(S)}) = -0,563$, $r(p_0^{(S)}, p_9^{(S)}) = -0,821$ и $r(p_0^{(S)}, p_{10}^{(S)}) = -0,712$. Тип отношения «ресурс–потребитель» имеет место, когда ледяное образование переходит из одной градации в другую в результате действия термических и динамических процессов. Кроме того, при их непосредственном контакте происходит рост площади их совокупного продукта. Образуется льдина большей площади, а первоначальные льдины выбывают из системы. Аналогичная ситуация рассматривается в [103], где в качестве исходного ресурса выступает магматический расплав, а формирующаяся из него ассоциация минералов является сообществом конкурирующих между собой потребителей.

Конфигурация проекций выборочных точек на плоскость первых $\{X_1^{(S)}, X_2^{(S)}\}$ расположена на ветвях скошенной буквы V. На ее правой стороне расположены проекции точек зимнего периода наблюдений. На левой стороне непосредственно следуют друг за другом точки начального и конечного периодов эволюции. Подобная конфигурация проекций выборочных точек признаковой системы для сплоченности указывает на отсутствие дискретности этапов эволюции ледяного покрова. Кроме того, в этой признаковой системе имеются незначительные различия между процессами осеннего формирования и весеннего разрушения покрова. С другой стороны, они статистически значимо отличаются от процесса зимней эволюции покрова. Таким образом, распределение выборочных точек в признаковом пространстве частот сплоченности обладает низкой информативностью для разделения этапов эволюции осеннего формирования и весеннего разрушения ледяного покрова. Качественная интерпретация $X_1^{(S)}$ и $X_2^{(S)}$ следует из конфигурации проекций выборочных точек: $X_1^{(S)}$ соответствует временному и сезонному, а следовательно, термическому изменению сплоченности ледяного покрова, $X_2^{(S)}$ – ее пространственному изменению. Справедливость первого утверждения очевидна – в крайней левой части находятся проекции выборочных точек начала и окончания эволюции, а в правой части – середина этого процесса. Достоверность второго утверждения основывается на анализе соответствующих коэффициентов корреляций: в крайнем правом вертикальном распределении проекций точек для одной и той же декады (изменению времени соответствует $X_1^{(S)}$) присутствуют ледяные поля низкой (вверху) и высокой (внизу) сплоченности. А подобная ситуация как раз и указывает на распределение сплоченности с севера на юг Японского моря.

Частоты площадей различных градаций толщины (7 признаков). Признаковое пространство характеризует распределение льда различных градаций толщины. Как и в предыдущем случае, первый признак $p_0^{(h)}$ указывает долю свободной ото льда площади района акватории (отсутствие льда эквивалентно нулевой толщине), остальные – площади образований льда с толщинами от 1 ($p_1^{(h)}$) до 6 баллов ($p_6^{(h)}$). Первый характеристический корень $\lambda_1 = 0,154$, второй – $\lambda_2 = 0,042$ при общей сумме характеристических корней 0,213, или ГК₁ объясняет 80 % обобщенной дисперсии, ГК₂ – 12 %, а их совокупность – 92 % обобщенной дисперсии признаков. Коэффициенты корреляций между исходными частотами и а. п. $X_1^{(h)}, X_2^{(h)}$ определяются коэффициентами табл. 2. Анализ корреляций с $X_1^{(h)}$ указывает, что ее рост обусловлен увеличением в районах долей площадей льда 3–5-балльной толщины и понижением долей площадей чистой воды. Поэтому крайние левые точки на рис. 2.7, Б соответствуют случаям осеннего начального формирования и весеннего разрушения ледяного покрова. Рост $X_2^{(h)}$ обусловлен ростом долей площадей первых трех градаций толщин льда и

уменьшением площадей льда последних градаций толщин. Разные знаки коэффициентов отражают, во-первых, «конкурентные» отношения толщины покрова и слоя моря, который может быть трансформирован в лед. Достаточно отметить, что $r(p_0^{(h)}, p_3^{(h)}) = -0,812$, $r(p_0^{(h)}, p_4^{(h)}) = -0,823$, $r(p_0^{(h)}, p_5^{(h)}) = -0,631$. Во-вторых, имеет место одновременное влияние термических (индивидуальный рост или уменьшение толщин) и динамических (подсовы одних льдин под другие, образование торосов) процессов на лед различных градаций толщин. Подтверждением этому являются статистически значимые коэффициенты корреляции: $r(p_2^{(h)}, p_3^{(h)}) = 0,462$, $r(p_3^{(h)}, p_4^{(h)}) = 0,563$, $r(p_4^{(h)}, p_5^{(h)}) = 0,541$. Особая роль тонких льдов h_1 и h_2 проявляется в низких значениях коэффициентов корреляции со льдами остальных градаций толщины (достаточно отметить, что его наибольшее значение равно 0,324 и отмечается между $X_1^{(h)}$ и $p_2^{(h)}$). В-третьих, если ледяное образование переходит из одной градации толщины в другую, то доля первого типа льда понижается, а второго – увеличивается.

Конфигурация выборочных точек на плоскости $\{X_1^{(h)}, X_2^{(h)}\}$ представляет собой достаточно плотно заполненный проекциями точек треугольник. Вдоль меньшей его стороны сосредоточиваются точки осеннего первичного периода эволюции, вдоль второй по размерам стороны – в основном весеннего заключительного этапа. Между этими сторонами размещены точки зимнего периода. Очевидно, что обход этого треугольника по часовой стрелке от вершины двух меньших катетов соответствует интуитивному представлению об эволюции ледяного покрова. Именно в признаковом пространстве частот площадей градаций толщин отчетливо проявляются особенности этапов эволюции, и именно в этом пространстве в наибольшей степени отражается эволюция изучаемого процесса. Как и при рассмотрении признаковой системы сплоченности, $X_1^{(h)}$ характеризует временные изменения площадей определенных градаций толщин, $X_2^{(h)}$ – как их пространственные изменения, так и действие динамических процессов. Интересно заметить, что коэффициент корреляции между $X_1^{(S)}$ и $X_1^{(h)}$ этих двух систем превышает 0,994, а между вторыми он отрицателен и равен $-0,374$. Остальные же корреляции практически отсутствуют (менее 0,1).

Частоты площадей льдин различных градаций размеров (8 признаков).

Признаковое пространство характеризует распределение льдин различных размеров. Подобно двум предыдущим признаковым системам, первый признак $p_0^{(F)}$ указывает долю свободной ото льда площади района акватории (отсутствие льда эквивалентно льдинам нулевых размеров), остальные – площади образований льда с размерами от 1 ($p_1^{(F)}$) до 7 баллов ($p_7^{(F)}$). Первый характеристический корень $\lambda_1 = 0,155$, второй – $\lambda_2 = 0,030$ при общей сумме характеристических корней 0,201. Поэтому первая ГК объясняет 77 % обобщенной дисперсии, вторая – 15 %, или первые две ГК объясняют 92 % обобщенной дисперсии признаков.

Анализ корреляций с $X_1^{(F)}$ указывает, что ее рост обусловлен возрастанием площадей реального льда и уменьшением площадей чистой воды. Поэтому крайние левые точки на 2.7, В соответствуют случаям осеннего начального формирования и весеннего разрушения ледяного покрова. Рост $X_2^{(F)}$ обусловлен возрастанием долей площадей припая (7-я градация размеров льдин) и убыванием долей площадей более низких градаций размеров. Разные знаки коэффициентов отражают, во-первых, «конкурентные» отношения размеров льда и площади акватории, которая может быть трансформирована в лед. Достаточно отметить, что $r(p_0^{(F)}, p_4^{(F)}) = -0,742$, $r(p_0^{(F)}, p_5^{(F)}) = -0,824$ и $r(p_0^{(F)}, p_6^{(F)}) = -0,663$. Во-вторых, имеет место одновременное воздействие на отдельные ледяные образования как термических процессов индивидуальных изменений их размеров, так и различного рода динамических процессов. Последние обуславливают как конвергенцию, или агрегирование, льдин при их непосредственном контакте, так и дробление льдин на отдельные составляющие фрагменты, когда из одной льдины сразу появляются льдины определенных градаций размеров. А первоначальная льдина выбывает из рассмотрения. Подтверждением этому являются статистически значимые коэффициенты корреляции: $r(p_4^{(F)}, p_5^{(F)}) = 0,643$ и $r(p_5^{(F)}, p_6^{(F)}) = 0,782$. Особая роль льдин первых трех градаций размеров проявляется в низких значениях коэффициентов корреляции с остальными типами льдин. В-третьих, если отдельные ледяные образования переходят из одной градации размеров в другую, то доля первой градации размера понижается, а второго – увеличивается.

Конфигурация проекций выборочных точек на плоскости $\{X_1^{(F)}, X_2^{(F)}\}$ представляет собой вытянутую вдоль $X_2^{(F)}$ последовательность отдельных точек. При этом $X_1^{(F)}$ соответствует временным изменениям площадей льдин различных градаций размеров. Достаточно отметить, что коэффициент корреляции между $X_1^{(S)}$ и $X_1^{(F)}$ равен 0,991, а с $X_1^{(h)}$ – 0,998. Однако $X_2^{(F)}$ этой системы признаков имеет качественное отличие от $X_2^{(S)}$ и $X_2^{(h)}$. Здесь она больше соответствует описанию динамических процессов конвергенции льдин и их дроблению на отдельные фрагменты.

Частоты площадей различных градаций сплоченностей, толщин и размеров (24 признака). Признаковое пространство характеризует совместное распределение сплоченностей, толщин льда и размеров льдин. Сообразно случаям А–В первый признак указывает долю площади чистой воды района акватории (отсутствие льда эквивалентно льдинам с нулевой толщиной и нулевых размеров), остальные – площади образований льда с градациями толщин от 1 до 6 баллов и градациями размеров от 1 до 7 баллов. Первый характеристический корень $\lambda_1 = 0,133$, второй – $\lambda_2 = 0,015$ при общей сумме характеристических корней 0,168. Поэтому ГК₁ объясняет 79 % обобщенной дисперсии, а ГК₂ – 9 %, или первые две ГК объясняют 88 % обобщенной дисперсии признаков. Анализ

корреляций с $X_1^{(S,h,F)}$ указывает, что ее рост обусловлен главным образом убыванием площадей чистой воды. Поэтому крайние левые точки на рис. 2.7, Г соответствуют случаям осеннего начального формирования и весеннего разрушения ледяного покрова. Динамика определяется прежде всего динамикой 5 типов площадей: $\alpha(p_3^{(h)}, p_4^{(F)}) = 0,146$, $\alpha(p_3^{(h)}, p_5^{(F)}) = 0,286$, $\alpha(p_4^{(h)}, p_5^{(F)}) = 0,234$, $\alpha(p_5^{(h)}, p_7^{(F)}) = -0,837$ и $\alpha(p_6^{(h)}, p_7^{(F)}) = -0,334$. Здесь $\alpha(\delta_i^{(h)}, p_j^{(F)})$ – соответствующие коэффициенты или нагрузки для ГК. Разные знаки коэффициентов отражают аналогичные предыдущим случаям особенности ледового режима моря.

Анализ конфигураций выборочных точек в рассмотренных признаковых пространствах соответствует интуитивным представлениям об эволюции ледяного покрова и показывает следующее. В рамках принятой пространственно-временной дискретности системы наблюдений отсутствуют отдельные изолированные скопления выборочных точек (наблюдений) и имеет место непрерывный характер их распределения. При этом выделяются направления, вдоль которых в исходном признаковом пространстве эти точки концентрируются, в частности направление временного изменения ледяного покрова.

Следует отметить, что непосредственно текущее время среди рассматриваемых признаков отсутствует. Однако указанное направление является доминирующим среди имеющихся остальных во всех рассмотренных признаковых пространствах – выборочные коэффициенты корреляции именно для их первых агрегированных показателей превышают значение 0,989. А распределение толщин явно указывает границы осеннего, зимнего и весеннего этапов эволюции. В системах признаков распределения как сплоченности, так и размеров льдин эти сведения присутствуют не в столь заметно выраженной форме. Вместе с тем признаковая система для градаций размеров льдин отражает динамические процессы конвергенции отдельных льдин и их дробления на отдельные фрагменты.

2.3.2. Сезонная динамика сплоченности, толщин и размеров льдин

Рассмотренная в предыдущем разделе выборка является статистическим описанием частот принадлежности параметров ледяных образований определенным интервалам их значений. Упорядоченные подобным образом числа представляют собой гистограммы, или оценки функций плотности распределений, которые предписывают детальный характер изменения сплоченностей, толщин и размеров льдин. Выявленные выше эмпирические закономерности следуют из динамики определенных комбинаций первых двух статистических моментов, используемых для исследования величин. А именно, выборочные средние значения и их выборочные дисперсии. Для построения этих оценок используются полученные в разд. 2.1.2 результаты оцифровки балльных оценок параметров.

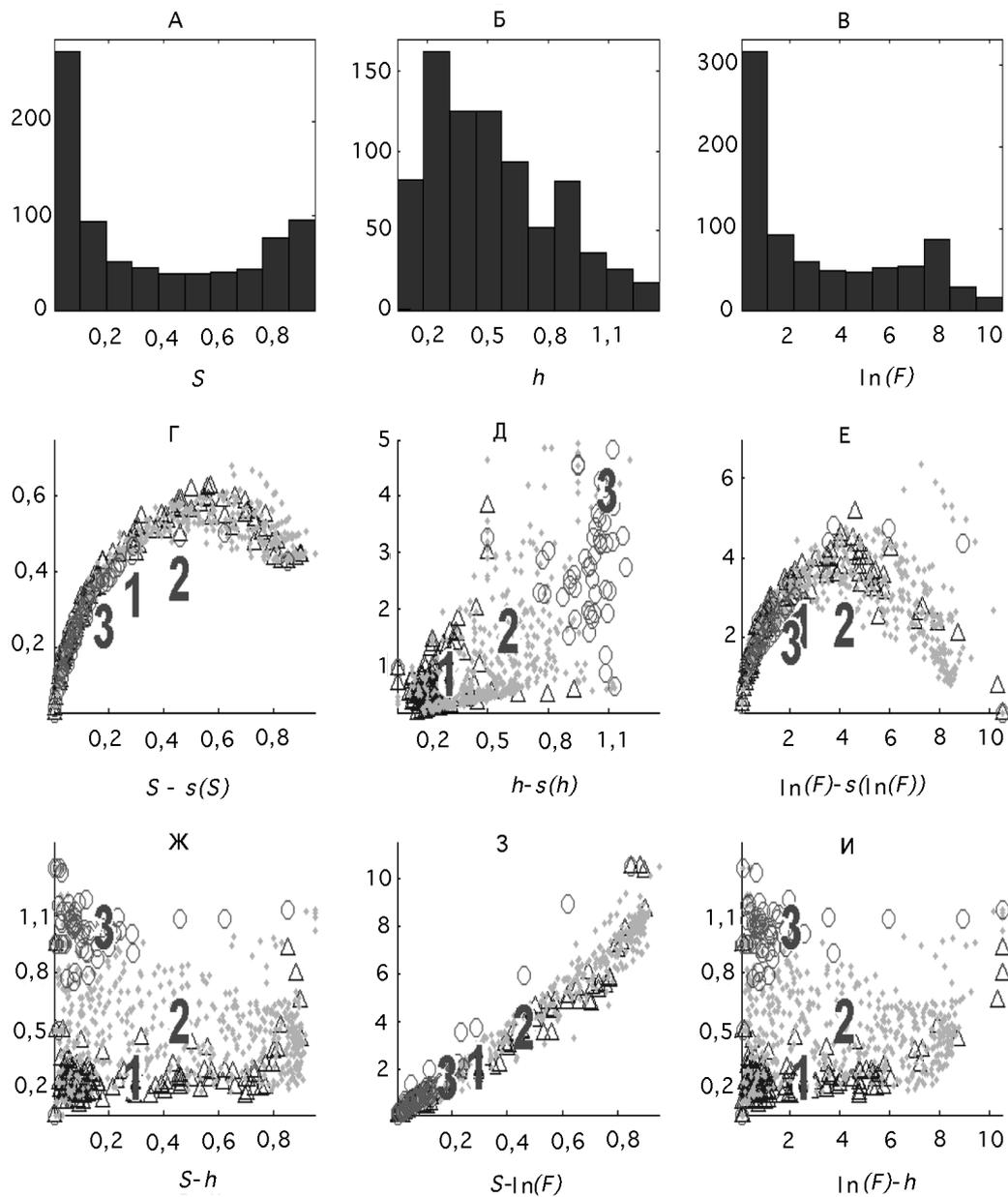


Рис. 2.8. Гистограммы распределений параметров S , h , $\ln(F)$ (А–В); совместные изменения среднеквадратических отклонений (s) и их средних значений (Г–Е); совместные изменения средних значений (Ж–И)

Гистограммы геометрических параметров ледяного покрова Японского моря для всего периода наблюдений представлены на рис. 2.8, А–В; совместные сезонные изменения среднеквадратических отклонений и их средних значений –

на рис. 2.8, Г–Е; совместные сезонные изменения непосредственно самих средних значений – на рис. 2.8, Ж–И (маркировка отдельных точек следует обозначениям рис. 2.7). Поскольку порядок изменения F существенно превосходит порядок S и h , то при анализе совместного изменения S – F и h – F используется логарифмическая шкала измерений F . Обоснованность подобных преобразований обусловлена тем обстоятельством, что для реальных ситуаций важен поиск зависимостей не только между исходными параметрами, но также между их некоторыми монотонными функциями.

Количественные оценки параметров указывают на следующие особенности их пространственно-временного изменения. Распределение сплоченности (рис. 2.8, А) следует U-образному распределению. Первая мода соответствует льдам низкой сплоченности (осеннее формирование и весеннее разрушение покрова), а вторая – покрову тех районов акватории, в которых льдом занято от 0,6 частей их общей площади. Значение моды приходится на значение сплоченности равное 0,8.

Интересно отметить, что в [34, 59] именно это значение фигурирует в качестве верхней оценки сплоченности для ненулевого значения аналога гидростатического давления (см. формулу (1.7)). Присутствующие в указанной зоне наблюдения соответствуют ледяным полям большой протяженности и зрелым льдам припая прибрежных районов.

Наличие двух мод в распределении сплоченности S имеет очевидное объяснение: на акватории моря имеются районы, которые покрываются льдами большой протяженности и остаются в этом состоянии до момента их весеннего термического разрушения. Несмотря на очевидность данного факта, случай рис. 2.8, А предопределяет требования для математической модели: должна быть предусмотрена ситуация, когда при максимальной сплоченности дальнейшее понижение температуры не изменяет ее величину, или ее полная производная в этом случае равна нулю.

Распределение толщин следует бимодальному распределению. Согласно рис. 2.8, Д первая мода соответствует льдам осеннего и зимнего этапов, а вторая мода – весеннего и отчасти зимнего этапов. Объяснением этого обстоятельства является тот факт, что при термическом разрушении покрова относительная скорость разрушения его площадей существенно выше соответствующей величины для их толщин. Достоверность этого факта следует из анализа расположения групп точек данного этапа на рис. 2.8, Ж (их центр помечен цифрой 3), где низким значениям сплоченностей соответствуют высокие значения толщин.

Распределение логарифма размеров отдельных льдин также следует бимодальному распределению, что достаточно очевидно: при изменении сплоченности соответствующим образом изменяются размеры отдельных льдин. Достаточно отметить, что выборочный коэффициент корреляции между S и $\ln F$ равен 0,983.

Распределение выборочных точек для случая рис. 2.8, Г интуитивно предсказуемо: по мере роста сплоченности (а следовательно, термических условий,

благоприятствующих росту морского льда) имеет место монотонный рост с.к.о. $\sigma(S_{dr})$, которые затем монотонно убывают. В правой части конфигурации сосредоточены выборочные точки в основном именно зимнего периода эволюции. Действительно, ближе к окончанию формирования покрова и наступлению его зрелого состояния с.к.о. сплоченности падает до нуля. При этом общее изменение сплоченности за весь цикл эволюции в определенной степени удовлетворяет требованиям обратимого процесса, когда осеннее формирование покрова можно описать в терминах его весеннего разрушения, и наоборот. Небольшие отличия между осенними и весенними этапами обусловлены следующим: весной, кроме таяния льда, имеет место его дробление и это приводит к более быстрому его разрушению. Необходимо также обратить внимание на низкую вариабельность S , что соответствует узкой полосе изменения значений $\sigma(S_{dr})$.

Распределение выборочных точек для случая рис. 2.8, Д указывает на существенное различие осеннего и весеннего этапов эволюции покрова. При осеннем формировании покрова значение $\sigma(h_{dr})$ следует почти линейному закону своего аргумента и при выходе его на определенный уровень также стабилизируется. В отличие от предыдущего случая здесь отсутствует период падения $\sigma(h_{dr})$ для больших значений аргумента. Указанная ситуация обусловлена непрерывным характером изменения толщины и неоднородной структурой покрова. Отличительной особенностью весеннего разрушения является снижение $\sigma(h_{dr})$ при фактически неизменной толщине. Данное обстоятельство связано с тем, что повышение температуры атмосферы сопровождается таянием ледяной толщи как изнутри, так и с обеих сторон своей поверхности. Действительно, под влиянием теплопроводности льда и проникновения коротковолновой радиации в лед его таяние происходит не только с верхней поверхности, но также и снизу, и непосредственно в толще льда [6]. При этом рост свободной ото льда площади воды, отражательная способность которой существенно ниже поверхности льда, способствует интенсивному прогреву нижележащих толщ воды. Поэтому первыми выбывают из рассмотрения тонкие льды, а достаточно мощные ледяные массивы не претерпевают столь существенных изменений. Сообразно сказанному, имеют место падение площади покрова и снижение его неоднородности $\sigma(h_{dr})$. Отличия осеннего и весеннего этапов обусловлены также отличиями физико-химических свойств подстилающей покров морской воды. Действительно, осенью к моменту появления льда в толще воды формируется ее верхний опресненный квазиоднородный слой [89]. Его формирование обусловлено опусканием охлажденных и, следовательно, более тяжелых масс морской воды и поднятием более теплых легких глубинных масс. При этом охлажденные воды имеют повышенную соленость, а воздействие ветра существенно увеличивает интенсивность перемешивания. Поэтому начальная эволюция протекает в достаточно однородной среде. А весной разрушение покрова происходит уже в неоднородной среде.

Распределение выборочных точек для случая рис. 2.8, Е показывает, что динамика размеров льдин начального и конечного этапов эволюции покрова практически совпадает с динамикой сплоченностей. Отличия касаются наклона кривых и наличия участка, где среднеквадратические отклонения принимают нулевые значения. Первая часть утверждения обусловлена различием удельных темпов роста–падения значений этих переменных. Кроме того, в отличие от размеров льдин сплоченность характеризует в определенном смысле инерционное состояние покрова всего района, и поэтому ее динамика имеет плавный характер. Другая часть наблюдаемого эффекта объясняется следующим. Как правило, крупные льдины (их максимальная протяженность превышает 10^4 м) присутствуют в береговой зоне, и они представляют припай, который в осенне-зимний период устойчив к изменению своих размеров. Равенство нулю среднеквадратических отклонений для такого типа льдин как раз и указывает на эту ситуацию. Скачок значений $\sigma(F_{dr})$ соответствует формированию или разрушению крупных припайных льдин.

Парные распределения геометрических параметров представлены на рис. 2.8, Ж–И. Конфигурации выборочных точек указывают на отсутствие значимых корреляционных зависимостей между сплоченностью и толщиной. Аналогичная ситуация имеет место для совместного изменения толщины–размера льдин. Данная зависимость присутствует только на временном отрезке от момента начального формирования до момента перехода к зрелому состоянию, когда в рамках принятой декадной дискретности вместе с ростом площади льда имеет место рост толщины покрова.

На этапе термического разрушения относительная скорость разрушения площади существенно выше относительной скорости разрушения толщины.

Детальная картина совместных распределений сплоченности, толщин и размеров льдин для отдельных этапов эволюции представлена на рис. 2.9. Здесь так называемые столбчатые двумерные диаграммы построены на основании усредненных совместных частот встречаемости отдельных показателей на протяжении отдельных сезонов. Усреднение выполнялось по выделенным на рис. 2.1 районам акватории моря. При этом поскольку рассматриваются усредненные по акватории геометрические параметры покрова, то уместно вместо сплоченности использовать термин «ледовитость моря».

В осенний период (рис. 2.9, А, Г, Ж) имеет место формирование покрова, когда районы акватории покрываются льдом средних градаций толщины. На этапе его зрелого состояния (рис. 2.9, Б, Д, З) районы покрыты льдом высоких значений толщины. На этапе его весеннего разрушения (рис. 2.9, В, Е, И) имеет место большое разнообразие площадей льдин повышенных значений толщин.

Сравнение случаев показывает, что эволюции припая свойственен волновой характер. Действительно, имеется последовательный переход одних категорий льда в другие, а процессы трансформации площадей припая в большей степени соответствуют диффузионным процессам.

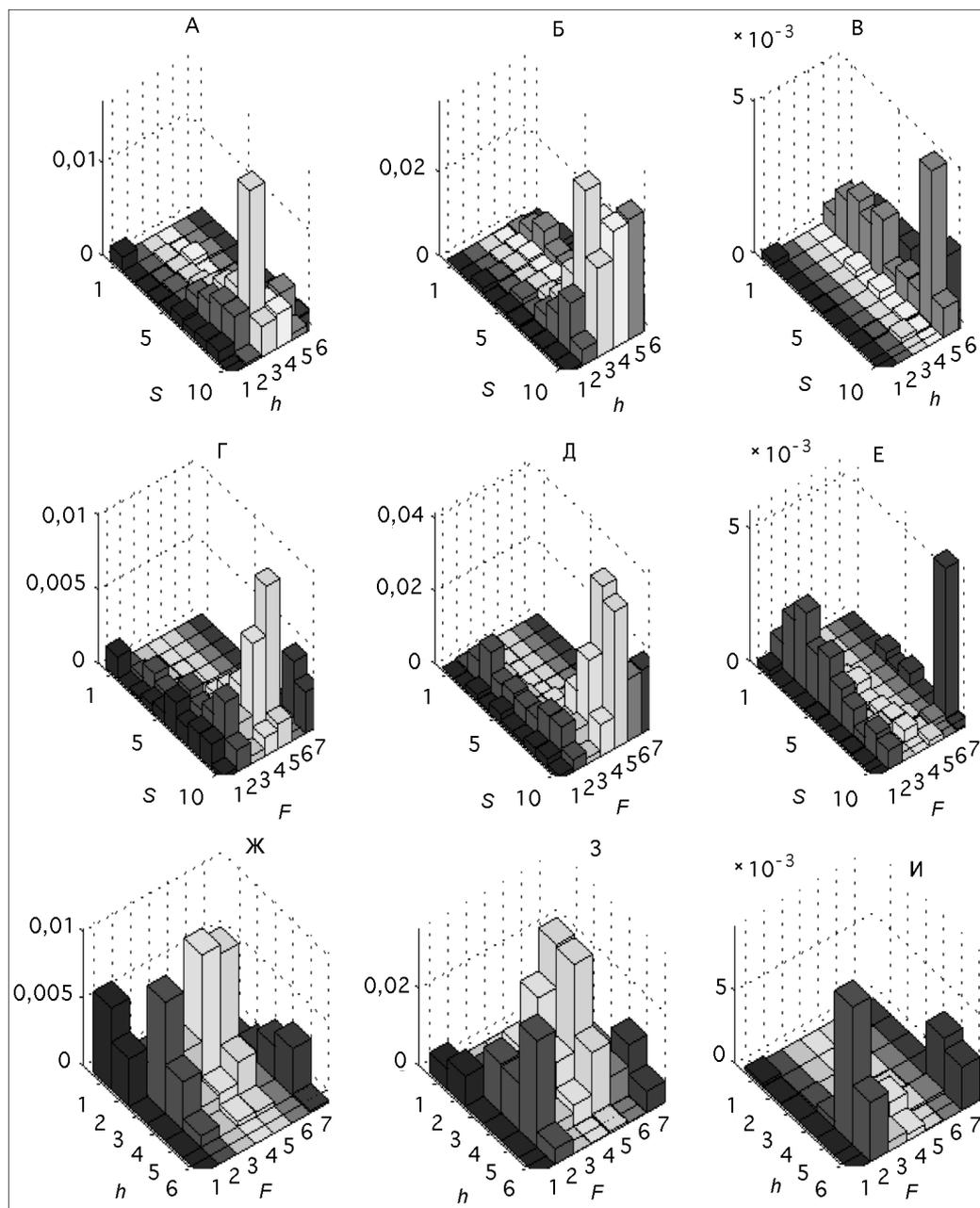


Рис. 2.9. Сезонные распределения ледовитости по градациям толщин и размеров льдин. Пояснения см. в тексте

Выявленные конфигурации выборочных точек в признаковых пространствах сплоченности, толщины, размера льдин и их общей совокупности показывают, что ледяной покров отдельного района акватории Японского моря является

собой одну из систем их общей статистической совокупности. Из тройки (S , h , F) именно система признаков толщин в наибольшей степени характеризует сезонность следования эволюции. То есть имеется явное соответствие между набором толщин покрова и текущим временем его присутствия на акватории моря. При этом в вопросах исследования покрова дисперсия геометрических параметров состояния имеет самостоятельное значение.

2.4. ЛЕДЯНОЙ ПОКРОВ ЗАЛИВА ПЕТРА ВЕЛИКОГО, РАЙОНА ТАТАРСКОГО ПРОЛИВА И РАЙОНА ПРОЛИВА ЛАПЕРУЗА

Ледяной покров Японского моря представляет собой пространственно-временную систему, эволюция которой существенно зависит от начальных условий и соответствующих процессов в прибрежных районах. Поскольку первичное появление льда на акватории моря отмечается в основном в районах 112–114 (см. рис. 2.1), то их состояние ледяного покрова в начальный момент эволюции системы (31-я декада) и определяет начальное состояние эволюции ледовитости. Актуальность изучения покрова этих районов обусловлена также следующим: во-первых, эти районы ограничивают область рассмотрения системы, во-вторых, они примыкают к самой узкой области между континентом и о-вом Сахалин, где сведения о ледовой обстановке во многом определяют практическую жизнедеятельность населения, в-третьих, в этих районах отмечается конечное присутствие льда.

Определенный интерес представляет рассмотрение распределения ледяного покрова для примыкающего к проливу Лаперуза 52-го района. В этом единственном месте под воздействием ветра и течений может происходить вынос льдов с акватории Японского моря.

Динамика усредненных по годам декадных значений сплоченностей, толщин и размеров льдин для залива Петра Великого (8-й район), районов Татарского пролива (114-й район) и пролива Лаперуза представлена случаями на рис. 2.10, А–В. Случаи Г–Е характеризуют распределения показателей для покрова залива Петра Великого, а Ж–И – покрова района Татарского пролива. Здесь в случаях Д, Е, З, И размеры льдин представлены в логарифмическом масштабе.

Характер изменения кривых на рис. 2.10 показывает, что для 112-го и 113-го районов эволюция ледяного покрова состоит в следующем (случай 114-го района представлен на рис. 2.10, Б). В момент начала его формирования на открытых участках районов здесь уже присутствует тонкий лед низкой сплоченности: $S_{112} \approx 0,109$ и $S_{113} \approx 0,099$ (нижние индексы – район акватории). Часть этого льда сюда поступает со стороны Татарского пролива, а оставшаяся часть сформировалась непосредственно здесь вследствие понижения температуры ат-

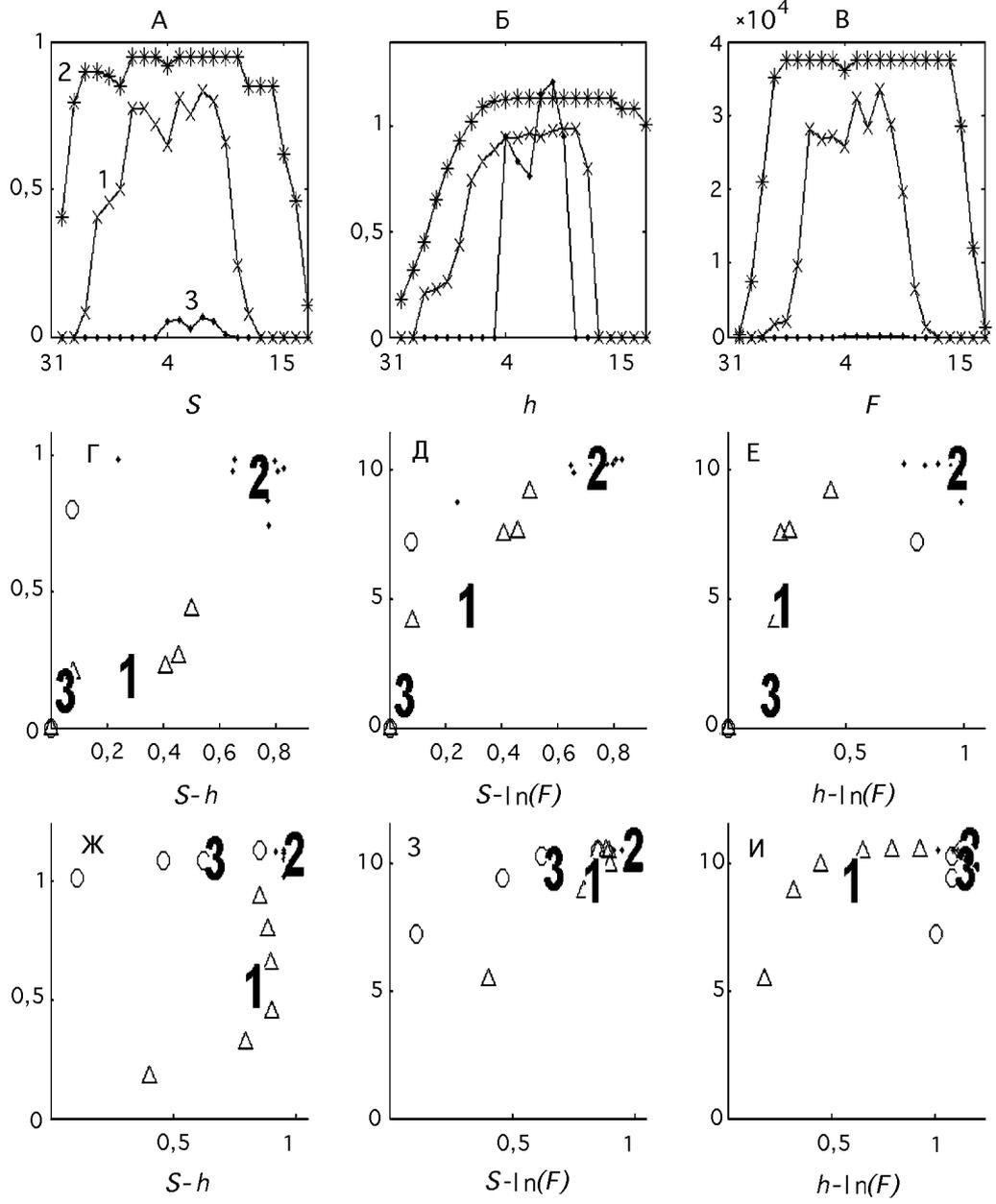


Рис. 2.10. Динамика сплоченности (А), толщины (Б) и размеров льдин (В) для залива Петра Великого (1), районов Татарского пролива (2) и пролива Лаперуза (3)

мосферы и наличия опресненных водных масс. Они доставляются сюда течениями из устья Амура и способствуют формированию льда. Далее следует резкий скачок значений сплоченности. График толщины имеет плавный характер своего изменения. При выходе сплоченности на свой критический уровень тол-

щина покрова продолжает свой монотонный рост. В 12–13-й декадах следует его прекращение, а затем – резкое падение значений. Всплеск значений толщин для 112-го района может быть обусловлен поставкой льдов со стороны Татарского пролива. Кривые размеров льдин имеют вид скошенных влево колоколов, вершины которых приходятся на 12–13-ю декады. Подобное поведение обусловлено тем, что при весеннем разрушении покрова происходят его таяние и интенсивное дробление. Образовавшиеся крупные льдины и их обломки перемещаются течениями и ветром на уже достаточно свободную ото льда более южную часть акватории. При этом дробление и таяние льда имеют непрерывный характер. В конце 16-й декады акватория моря полностью освобождается ото льда. Присутствие незначительных объемов льда в районе пролива Лаперуза наблюдается с 4-й по 9-ю декаду. Диапазон изменения значений кривых достаточно низок. Поэтому для льда Японского моря практически отсутствуют «стоки» его материала. Парные же распределения параметров ледяного покрова (рис. 2.10, Ж–И) следуют общим закономерностям, выявленным ранее на основании анализа всей выборки. Здесь также отмечается нелинейность соотношений $S = S(h)$ и $S = S(F)$ для наблюдений осеннего периода.

2.5. ПРИПАЙ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ЯПОНСКОГО МОРЯ

Припай является неподвижным образованием льда, который совместно со льдами открытого моря представляет ледяной покров в районах прибрежной зоны. В рассматриваемой выборке он представлен 896 наблюдениями, выполненными в 51 районе побережья моря. Согласно классификации [65] и принятой нумерации он характеризуется значением $F = 7$. Актуальность его изучения обусловлена обеспечением безопасности жизнедеятельности населения, добычей полезных природных ископаемых, практическими потребностями строительства и судоходства.

Для изучения особенностей распределения площадей припая по отдельным градациям толщин была сформирована выборка 6-мерных наблюдений. Формирование наблюдений выполнялось согласно изложенной в разд. 2.1 методике. На рис. 2.11, А, Б представлена динамика сплоченности припая, льда открытого моря и общей сплоченности в двух отдельных районах моря. За начальную точку отсчета оси времени выбрана первая декада эволюции покрова на акватории Японского моря. Выбор именно района залива Петра Великого и района Татарского пролива обусловлен их крайними положениями на акватории.

Поэтому сравнение распределений позволяет выявить особенности эволюции припая. Кроме того, залив Петра Великого представляет наиболее закрытый район акватории моря, и поэтому для дальнейшего математического моделирования распределение геометрических параметров покрова в нем представляет особый интерес.

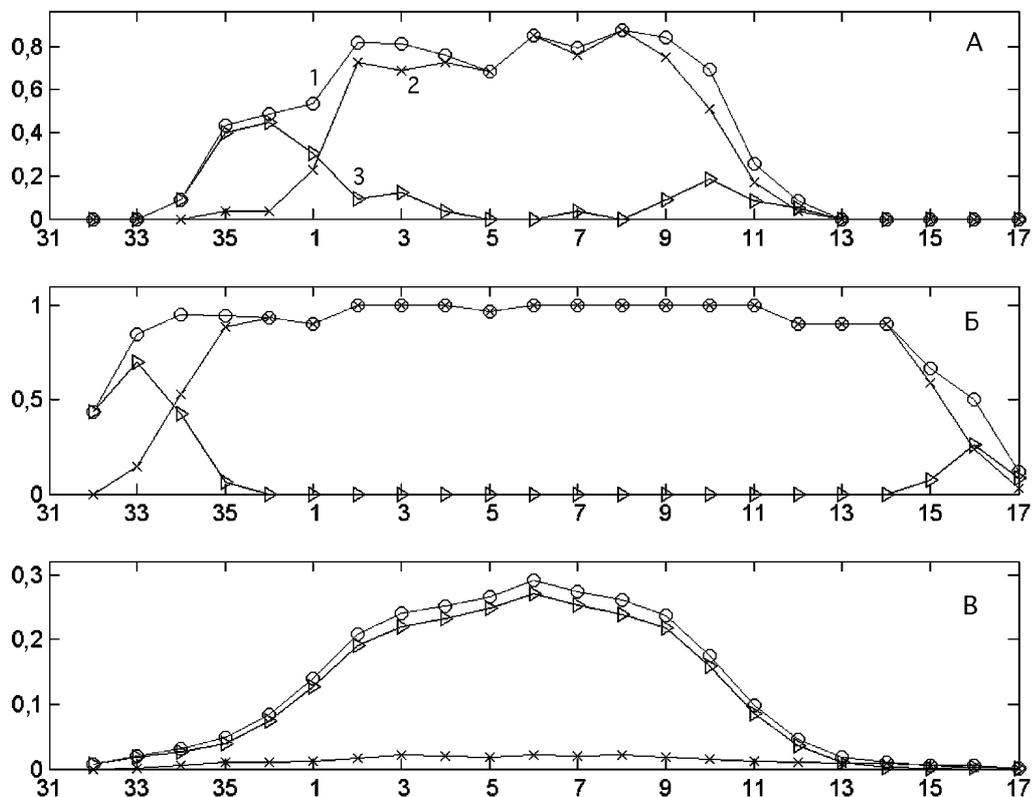


Рис. 2.11. Динамика сплоченности (1), площадей открытого моря (2) и припая (3) для района залива Петра Великого(А) и района Татарского пролива (Б); динамика ледовитости моря (В)

Характер распределения сплоченностей показывает следующее. На акватории залива Петра Великого первоначальные формы припая формируются в промежутке между 33-й и 34-й декадами. Причем в этих декадах около 4 % площади акватории покрыто льдом первых градаций толщин. Далее следует стремительный рост площади льда и уже к началу 2-й декады льдом покрыто более 72 % площади акватории. Начало разрушения покрова приходится на 8-ю декаду. При этом за 2 декады его площадь падает с 75 до 17 %. На акватории Татарского пролива интенсивность формирования и разрушения покрова существенно выше. И в том и другом случае между припаем и льдами открытого моря имеет место взаимоисключение: за исключением декад начального формирования и окончательного разрушения, отсутствуют периоды времени какого-либо их совместного роста или падения. Более того, рост припая сопровождается падением площади льда в открытой части акватории района. А при разрушении припая имеет место тенденция роста площади льда в открытом море. Данный факт сам по себе очевиден – при разломе припая его отдельные фрагменты переходят в категорию льдов открытого моря. Иными словами, указанные категории льда

следуют конкурентным отношениям за их общий ресурс – морскую воду. При этом припай доминирует.

Интересным представляется вопрос о величине корреляции между общей площадью припая всей акватории и общей площадью льда в открытом море. Анализ рис. 2.10, Б показывает, что наибольшая площадь припая приходится на декаду наибольшего значения ледовитости Японского моря. Здесь при построении кривых учитывались площади отдельных районов, которые выражены в условных единицах площади открытого района моря.

Наличие синхронности совместного изменения также подтверждается высоким значением соответствующего коэффициента корреляции, равным 0,879. Отмеченная закономерность обусловлена тем обстоятельством, что вследствие региональной специфики Японского моря этап зрелого состояния его припая совпадает с этапом зрелого состояния льдов открытого моря. Поэтому состояние припая во многом определяет состояния покрова в открытой части моря, и наоборот. Это происходит несмотря на существенные различия значений площадей льда в обеих зонах моря. Соответствующая линия регрессии определяется выражением

$$L_B = \beta_1 + \beta_2 L_S,$$

где L_S, L_B – ледовитости открытого моря и припая; $\beta_1 = 0,00983 \pm 0,00351$ и $\beta_2 = 1,261292 \pm 0,03203$. Коэффициент корреляции между наблюдаемой L_B и ее моделью равен 0,878, т. е. фактически совпадает с реальностью.

2.6. ТЕМПЕРАТУРНЫЙ И ВЕТРОВОЙ РЕЖИМЫ НАДЛЕДНОГО СЛОЯ ВОЗДУХА

Согласно положениям термодинамики [68] ледяной покров представляет собой открытую систему, которая обменивается с внешней средой энергией и веществом. В данном случае внешней средой являются атмосфера и гидросфера. Поэтому различного рода особенности в обеих средах соответствующим образом отражаются в их совокупном продукте. Для оценки степени воздействия каждой из сред используется определенный набор измерений ряда физических параметров. В частности, оценка воздействия атмосферы выполняется на основании измерений температуры слоя воздуха на определенном уровне высоты от поверхности льда и измерений составляющих скоростей ветра. Первая из них характеризует термические процессы в атмосфере, вторая – инициированные перераспределением льда динамические процессы. Многолетние исследования динамики ледяного покрова [21, 30, 14, 54, 56] показали, что именно метеорологические факторы являются определяющими для его эволюции. Между термическим и ветровым фактором имеется явная причинно-следственная связь, кото-

рая обусловлена процессами переноса ветром холодных и теплых масс воздуха. Следует также отметить совместный их эффект при формировании верхнего квазиоднородного слоя воды (ВКС), когда с понижением температуры ветер и морские течения существенно интенсифицируют перемешивание его толщи. Осеннее охлаждение температуры и ветровое воздействие приводят к формированию в толще воды ВКС. При этом именно ветер усиливает испарение и, следовательно, охлаждение водной поверхности. Последующее понижение температуры приводит к появлению первоначального льда. Когда покров уже присутствует, посредством ветра и морских течений осуществляется пространственное перераспределение масс льда на всей акватории моря. С наступлением весеннего потепления следует термическое разрушение покрова, пространственное перераспределение которого усиливается при воздействии ветра и морских течений.

Указанные достаточно очевидные факты характеризуют комплексный механизм воздействия температурного и ветрового режима на ледяной покров. Однако для Японского моря как объекта исследований требуется статистическая оценка диапазона суточных характеристик температурного и ветрового режимов в период присутствия на его акватории льда. Эти сведения в дальнейшем используются для численной оценки ряда параметров соответствующих математических моделей. Кроме того, для их функционирования требуется реальная выборка натурных данных, статистическая структура которых заранее неизвестна. Для реализации данной процедуры был использован любезно предоставленный В.П. Туноголовцом фактографический материал за период 1960–2001 гг., характеризующий пространственно-временные распределения температур 2-метрового слоя воздуха и скорости ветра на 10-метровой высоте.

Изолинии температур для начальных (А–В) и конечных (Г–Е) декад, а также изолинии для усредненных за сезон распределений температур (Ж–И) представлены на рис. 2.12.

Согласно представленным на рис. 2.12 случаям конфигурация изотерм в непосредственной близости моря следует его контуру, что обусловлено очевидными соображениями. Бассейн моря заключает в себе гигантские массы теплоемкого материала, коим является морская вода. Поэтому в теплый период здесь аккумулируется огромная тепловая энергия, препятствующая резкому вторжению на акваторию фронта переносимых ветром холодных масс воздуха. В зимний период море остывает, и весной рассмотренная ситуация имеет обратный сценарий. Теперь уже непосредственно море препятствует резкому вторжению теплых масс воздуха. Подобным образом море и его ледяной покров влияют на развитие макросиноптических процессов. Распределение полей направления ветра представлено на рис. 2.13. Характер их расположения и периоды времени отвечают предыдущему следованию. Направления и длины векторов соответствуют выборочным натурным значениям. Анализ случаев А, Б указывает на то, что осенью ветра имеют направления с севера на юг и с запада на восток. Поэто-

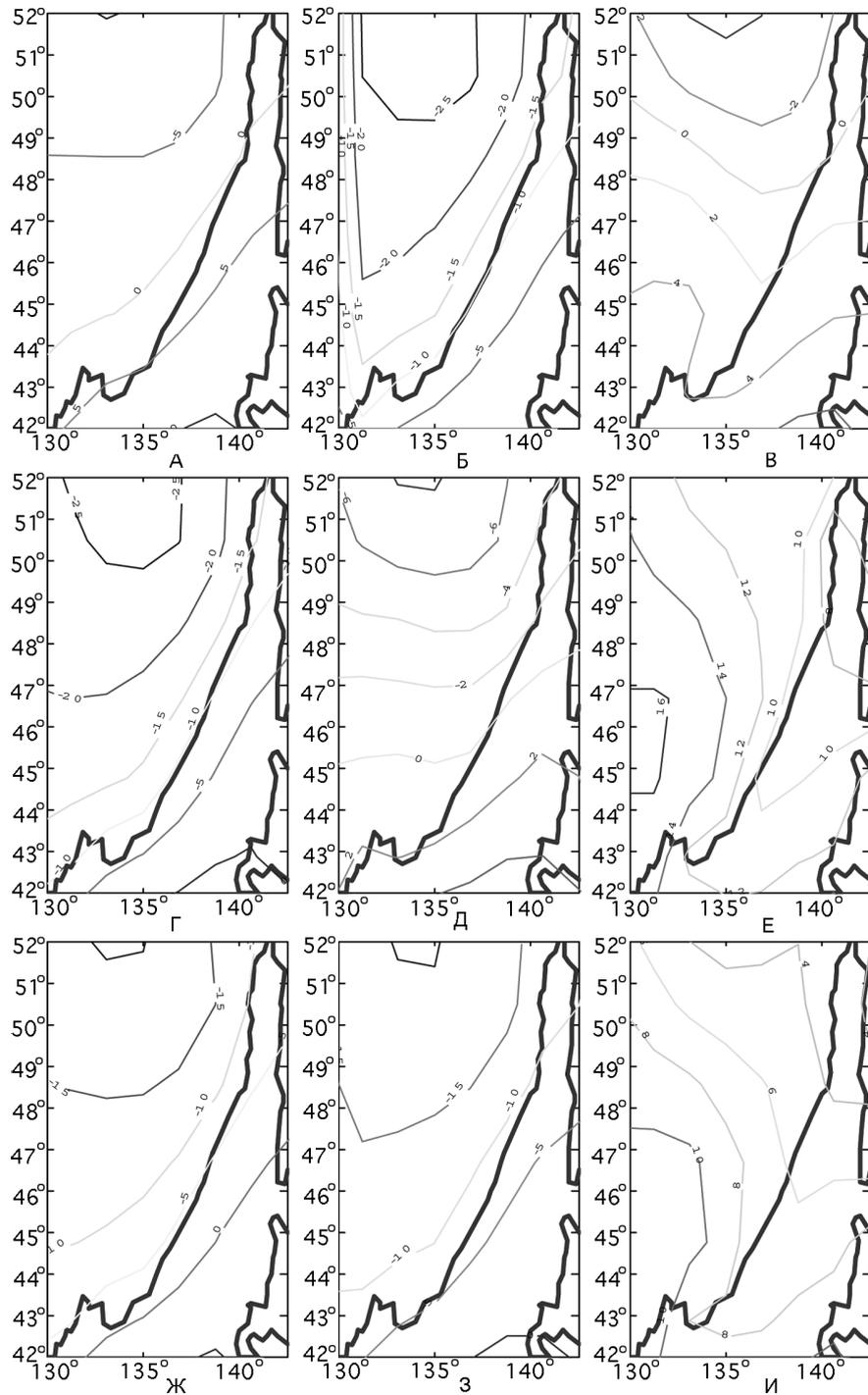


Рис. 2.12. Изотермы температур 2-метрового слоя воздуха. Полуширной линией показан контур моря. Пояснения см. в тексте

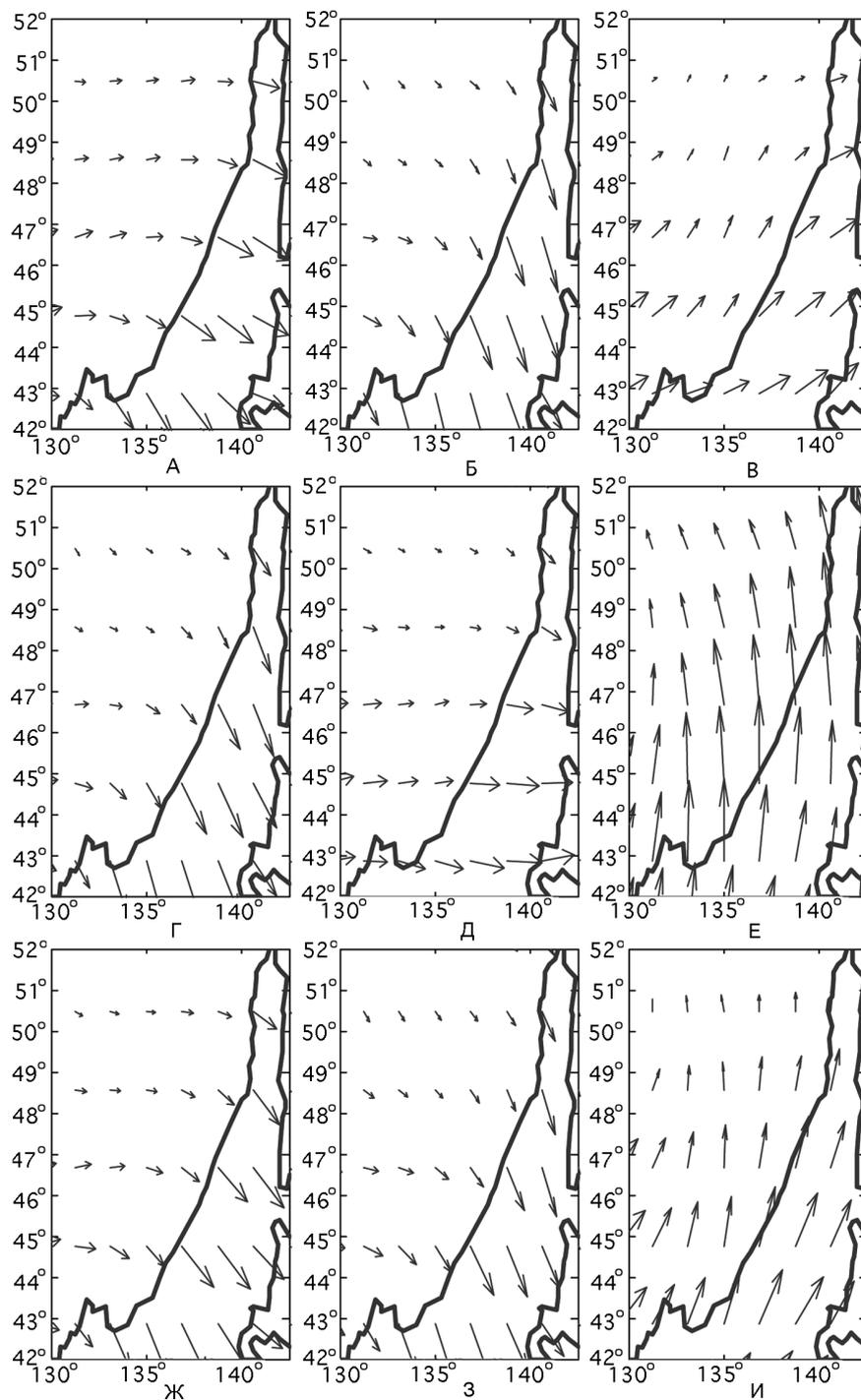


Рис. 2.13. Распределения направлений ветра. Полуширной линией показан контур моря. Пояснения см. в тексте

му перенос холодных масс воздуха вблизи моря обуславливает охлаждение северных и западных участков акватории. При этом преобладающим направлением как осенью, так и зимой является все же первое.

Весной же преобладающим на акватории моря является направление ветра с севера на юг. При этом в южной части моря действуют более сильные ветра, чем в северной. Сочетание теплового и ветрового воздействия на покров обуславливает вскрытие и последующее разрушение припая. Дальнейшее потепление приводит к окончательному разрушению и таянию покрова.

Для оценки состояния покрова представляется важным вопрос о характере изменения в каждом районе акватории взаимных корреляционных функций температура–сплоченность $R_{TS}(k)$ и температура–толщина $R_{TH}(k)$, где k – временное запаздывание.

Представленный на рис. 2.14 случай А характеризует выборочное распределение $R_{TS}(k)$ для залива Петра Великого и Татарского пролива. Случай В характеризует выборочное распределение $R_{TH}(k)$. Соответствующие карты плотности, где абсолютные значения функций превышают уровень 0,65, представлены случаями Б и Г. Анализ выборочных распределений показывает значимую корреляционную зависимость между указанными величинами. При этом величина запаздывания не превышает одну декаду, что подтверждается проверкой статистических гипотез о равенстве коэффициентов корреляций. Вместе с тем имеются районы, где $\max|R_{TS}(k)|$ и $\max|R_{TH}(k)|$ не превышают уровня 0,4. К ним относятся районы срединной части моря. Таким образом, согласно выборочным распределениям этих функций можно утверждать: в отдельных районах акватории время отклика площадей покрова и его толщин как динамических систем в ответ на изменение температуры имеет порядок временного шага, что в данном случае составляет одну декаду. Предметом первых ледовых прогнозов являлось предсказание сроков появления и первоначального разрушения льда. Выполненные за рассматриваемый период расчеты показывают: в прибрежных районах Японского моря средняя температура атмосферы за предшествующую декаду его первичного присутствия $T_0 = -(8,4 \pm 4,2)^\circ\text{C}$, а первичного разрушения сплоченности – $T_{S1} = -(9,1 \pm 4,7)^\circ\text{C}$. Здесь рассматриваются только прибрежные районы, поскольку именно для них температура атмосферы отражает условия первичного формирования льда. При этом полагается, что момент первичного разрушения в каждом районе соответствует декаде максимальной сплоченности. Если за момент разрушения покрова принять декаду перехода через максимум толщины покрова, то $T_{h1} = -(7,8 \pm 4,3)^\circ\text{C}$ (для различия величин им приписан соответствующий подстрочный индекс). Согласно критерию Стьюдента между этими величинами отсутствуют статистически значимые отличия. Таким образом, согласно результатам анализа декадных распределений сплоченности и толщин покрова Японского моря справедливым является допущение

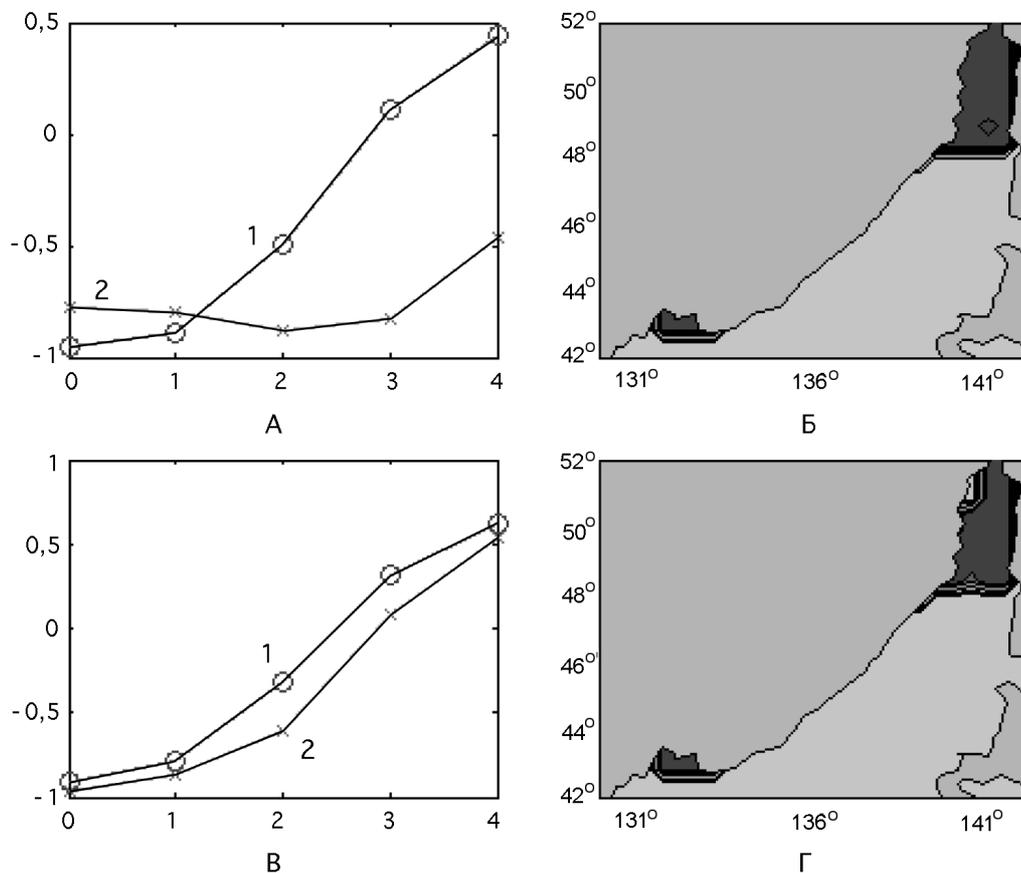


Рис. 2.14. Выборочные взаимные корреляционные функции и карты плотности их значений: 1 – залив Петра Великого, 2 – Татарский пролив

о совпадении температуры атмосферы в моменты его первичного формирования и первичного разрушения.

ВЫВОДЫ

Согласно поставленным в гл. 1 задачам результаты выполненного анализа данных декадных распределений сплоченностей и толщин покрова, а также температур 2-метрового слоя воздуха и скоростей ветра на 10-метровом уровне от поверхности льда состоят в следующем.

1. В пространстве декадных состояний ледяного покрова распределение выборочных точек лежит в его ограниченном компактном подпространстве существенно меньшей размерности. Следовательно, выборка является представительной и отражает существо процессов эволюции.

2. Распределение сплоченностей покрова удовлетворяет условию обратимости, т. е. весеннее разрушение площадей покрова может быть описано в терминах их осеннего формирования.

3. Распределение толщин покрова насчитывает две ветви эволюции, одна из которых характеризует этап осеннего формирования толщин, а другая – весеннего разрушения. Их наличие обусловлено тем обстоятельством, что весеннее таяние льда сопровождается процессами его дробления и именно этот факт приводит к быстрому разрушению покрова.

4. Состояние припая во многом определяет состояние покрова в открытой части моря, и наоборот.

5. Выявлено наличие запаздывания между декадными распределениями температуры атмосферы и сплоченности. Величина запаздывания в рамках декадной временной дискретности составляет один временной шаг. Для распределения толщин покрова она равна двум временным шагам.

6. Обнаружено совпадение температур атмосферы для этапов первичного формирования покрова и начального его разрушения.

**СИНЕРГЕТИКА
ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА
ЗАМЕРЗАЮЩИХ МОРЕЙ**

Формирование и последующий процесс эволюции ледяного покрова замерзающих морей происходят при сочетании разнообразных внешних воздействий. В числе основных из них выделяются термическая и ветровая составляющие. Между ними имеется причинно-следственная связь, формализованная посредством уравнений переноса тепла и массы для надледного слоя воздуха [10, 62, 54, 60, 19, 64]. И если первая является непосредственно основной причиной возникновения льда и роста его массы, то вторая составляющая во многом обуславливает многообразие внешних форм отдельных льдин, наличие торосов и разводий в сплошном ледяном покрове. При этом непосредственно сам покров не является пассивным образованием – он представляет собой определенную динамическую систему, состоящую из множества взаимодействующих между собой частиц (в контексте настоящего рассмотрения отдельных ледяных образований покрова). Коллективное поведение частиц при наложенном внешнем поле обуславливает формирование и таяние толщины покрова, агрегацию льдин и их дробление. В подобных системах имеют место как детерминированные, так и стохастические, или вероятностные, закономерности изменения динамических переменных системы. Например, толщина покрова следует определенной тенденции термического свойства (если не учитывается образование торосов и различных наслоений льдин), а природа агрегации льдин и их дробления определяется статистическим характером поведения отдельных льдин.

Подобные задачи составляют предмет статистической физики, где знание законов, управляющих движением отдельных объектов системы, позволяет установить движение макроскопических масс вещества. Следуя положениям этой теории, функция распределения частиц (элементов, объектов) системы в их фазовом пространстве удовлетворяет кинетическому уравнению Больцмана. Предметная конкретизация его потоковых членов и интеграла столкновений выполняется на основании понятий и принципов синергетики [18, 89, 69]. Согласно им объекты различной физической природы следуют некоторым общим закономерностям. В частности, льдины различных градаций их динамических свойств, подобно ассоциациям минералов или растениям биологических сообществ [98, 88], согласованно разделяют общий пространственно-временной ресурс. Во всех перечисленных случаях действует принцип Либиха [77], согласно которому эволюция подобных систем определяется лимитирующим фактором. В настоящем рассмотрении этим фактором является пространственная ограниченность среды. При построении моделей также учитываются спецификации условий наблюде-

ния, когда их структура является в некоторой мере predetermined по отношению к набору измеряемых в экспериментах динамических переменных.

3.1. ТЕРМИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ТОЛЩИНЫ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

Образование ледяного покрова происходит при замерзании морской воды на нижней границе льда. На этой границе величина вертикального потока тепла определяет прирост толщины. Численное значение потока может быть найдено при расчете вертикального теплообмена между нижней границей льда и атмосферой через толщу льда и лежащего на нем снежного покрова. Процедура расчета основывается на решении уравнения теплопроводности при естественных допущениях, что температура поверхности снега близка к температуре атмосферы T_a , а температура на нижней границе льда постоянна и равна $-1,8$ °C [62]. Здесь и далее в настоящей работе фигурирует температура определенного слоя надледного воздуха, и поэтому для простоты изложения у температуры отсутствует нижний индекс. Полагается, что термический режим этого слоя однозначно отражает характер физического взаимодействия атмосферы и океана. Обычно в его качестве выступает 2- или 10-метровый слой воздуха.

Процесс нарастания ледяного покрова конечен по своей величине не только по причине его пространственной ограниченности. Действительно, рост за счет теплопроводности толщины льда и снега приводит к уменьшению потока тепла через лед. В дальнейшем этот поток выходит на уровень величины потока тепла из воды в лед. Кроме того, миграция изо льда в воду рассола (жидкой фазы с высокой концентрацией солей) также приводит к снижению потока тепла через лед. Непосредственный процесс миграции обусловлен [23]: наличием в толще льда температурного градиента, влияющего на концентрацию рассола вдоль него; воздействием гравитационных сил, способствующих стеканию рассола вниз; действием гидростатического давления, выжимающего рассол из ячеек льда. Миграция приводит к осолонению подледных вод и повышению плотности морской воды [110]. Поэтому их трансформация в лед осуществляется при более низких температурах, чем температура уже сформированного слоя льда. При этом осолонение воды приводит к ее конвективному перемешиванию: на смену уже охлажденным и более соленым водам поднимаются более теплые глубинные воды, увеличивающих поток тепла к нижней поверхности льда. Результат сочетания этих и ряда других процессов приводит к конечности нарастания толщины льда.

Рассмотренные выше факты указывают, что скорость термической эволюции толщи льда $\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_\phi$ непосредственно определяется самой температурой воздуха, текущей толщиной покрова h и максимально возможной для конкретного

района акватории толщиной льда H^* (физико-географическая характеристика района – для мелких водоемов она равна его глубине) [101, 102, 115–118]. Понятно, что в начальный момент она равна нулю – льда нет, и, соответственно, скорость роста равна нулю. На этапе первичного формирования покрова, когда h мало, скорость роста является ее линейной функцией. По мере ее приближения к зрелому состоянию покрова $h \sim H^*$, когда весь ресурс уже «израсходован», толщина стабилизируется, и поэтому на этапе зрелого состояния покрова $\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_\phi$ равна нулю. На этапе же разрушения имеет место обратная ситуация. При этом в момент окончательного разрушения льда функция обращается в нуль. Интенсивность данных процессов определяется температурой атмосферы и рядом сопутствующих факторов. Согласно сказанному параметрическая форма скорости термической эволюции толщины может быть представлена уравнением

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_\phi = f_h(T)(H^* - h)h, \quad (3.1)$$

где $f_h(T)$ – соотнесенное к единице доступного ресурса относительное изменение толщины за единицу времени. Она является монотонной функцией и характеризует интенсивность термического воздействия.

Физическая интерпретация модели (3.1) состоит в следующем. На этапе формирования покрова его толща является «потребителем» исходного ресурса морской воды. Естественно принять допущение о том, что скорость его потребления определяется температурой среды. Кроме того, допускается пропорциональность этой скорости как текущей величине доступного ресурса морской воды, так и текущему значению толщины покрова. А коэффициент пропорциональности отражает интенсивность воздействия наложенного на систему внешнего поля. Необходимо заметить, что на этапе таяния покрова ресурс и его «потребитель» меняются местами – если при формировании покрова ресурсом для льда как его потребителя являлся слой ВКС, то при таянии покрова уже лед выступает в качестве ресурса для морской воды. Следовательно, на этапе таяния покрова, $f_h(T)$ должна изменить свой знак и стать отрицательной. Если принимается допущение о совпадении температур первичного формирования покрова T^* и его первичного разрушения (достоверность этого положения подтверждается результатами разд. 2.6), то аппроксимацией этой функции может служить соотношение

$$f_h(T) = \begin{cases} \alpha_h \times (T^* - T), T^* > T \\ \alpha'_h \times (T^* - T), T^* < T \end{cases},$$

где α_h, α'_h – неотрицательные коэффициенты пропорциональности. Размерность этих коэффициентов – $(м \cdot ^\circ C \cdot сум)$, т. е. их численное значение определяет суточное изменение толщины покрова при изменении температуры атмосферы на один градус Цельсия. Для пояснения приемлемости подобного соотношения достаточно представить $f_h(T)$ в виде линейной функции температуры: $f_h(T) = \beta + \alpha(\tilde{T} - T)$, где \tilde{T} – некоторая величина. Тогда с точностью до обозначений левая часть может быть записана в виде $\alpha \times (T^* - T)$, где $T^* = \alpha \times (\tilde{T} + \beta / \alpha)$.

Чтобы не перегружать систему обозначений, здесь и везде в дальнейшем принимается следующее. Если у коэффициента в качестве верхнего индекса стоит звездочка, то он характеризует предельное значение определенного физического параметра среды (толщины покрова, площади акватории района и т. д.); α с соответствующим нижним индексом является мерой интенсивности роста этой динамической переменной в период формирования и зрелого состояния покрова; α' с соответствующим нижним индексом является мерой интенсивности убывания динамической переменной в период весеннего таяния и разрушения покрова.

Введение допущения о разрывах значений $f_h(T)$ обусловлено тем, что в результате проникновения коротковолновой радиации в лед его таяние происходит не только с верхней поверхности (при отсутствии разводьев величина стаивания сверху может быть в 5–6 раз выше, чем снизу [41]), но также с боков, снизу и в самой толще льда (внутреннее таяние) [6]. Поэтому интенсивность таяния покрова превосходит интенсивность его формирования даже в случае симметрии распределения температуры атмосферы, когда $T^* - T$ для этапа осеннего формирования и $T - T^*$ для этапа весеннего разрушения совпадают. Например, известно, что при одной и той же температуре атмосферы в ясные дни интенсивность таяния льда выше, чем в остальные дни [62]. Достоверность этого факта подтверждается рис. 2.8, Д, где эволюция толщины покрова насчитывает две ветви эволюции. Первая из них отвечает этапу формирования и зрелого состояния покрова, а другая – этапу его разрушения. При этом продолжительность первого этапа выше продолжительности второго. Введение разрыва значений $f_h(T)$ является искусственным приемом, поскольку при уточненном рассмотрении таких разрывов на самом деле нет, но изменение некоторых величин происходит настолько быстро (за время $t_c \ll t^*$), что их следует рассматривать как скачкообразные [107]. Другой причиной введения разрыва значений является отсутствие дополнительных сведений и исходных данных о характере формирования и начального таяния покрова Японского моря. В первую очередь это касается температуры воды и ее солёности в эти моменты времени, исходных данных о солнечной радиации.

Перемена знака $f_h(T)$ происходит в тот момент, когда температура слоя атмосферы превышает значение T^* . Согласно сказанному функцию $f_h(T)$ следует определить следующим образом: $f_h(T) = \alpha_h(T^* - T)$, если $T \leq T^*$ и $f_h(T) = \alpha'_h(T - T^*)$, если $T > T^*$. Численные значения оценок α_h и α'_h определяются при проведении серии вычислительных экспериментов на основании выборки распределений температуры и толщин покрова. Аналогичная ситуация относится и к оценке T^* . Интересно заметить, что в [79] цитируются результаты работы В.М. Карпеца, согласно которым из наблюдений следует приблизительное совпадение границы морских льдов с изотермами приводного воздуха – 7,5 °С в Северном и –6,5 °С в Южном полушариях.

Введение в рассмотрение универсальных для конкретного моря параметров эволюции покрова α_h, α'_h и T^* позволяет оценить продолжительность стадии его формирования и устойчивого состояния и соответственно стадии разрушения только на основе значений температуры атмосферы. В настоящем случае T^* характеризует определенное сочетание внешних условий, при которых начинается первичное ледообразование. Очевидно также, что ее значения для припая T_B^* и льда открытой части районов моря T^* различаются между собой. Действительно, воды припая являются относительно неглубокими и более пресными вследствие опреснения их речными водами и стоками промышленных предприятий. Поэтому ледообразование в морских районах начинается при более низких температурах атмосферы, чем в прибрежных районах. Термическое разрушение льда в открытом море также начинается раньше разрушения припая при более низких температурах – в этот период активно проявляет себя сочетание воздействия солнечной радиации и теплых южных течений [113, 114].

Вычислительные эксперименты показывают (см. гл. 4), что численные оценки параметров определяются интервалами: $\hat{\alpha}_h = (2,842 \pm 0,209) \cdot 10^{-3} (м \cdot ^\circ C \cdot сут)^{-1}$ и $\hat{\alpha}'_h = (8,051 \pm 1,137) \cdot 10^{-3} (м \cdot ^\circ C \cdot сут)^{-1}$, $\hat{T}_B^* = -(6,3 \pm 0,8)^\circ C$, $\hat{T}^* = -(7,6 \pm 0,9)^\circ C$. Согласно оценкам этих параметров мера интенсивности термического разрушения покрова, измеряемая значением соответствующего коэффициента, почти в 3 раза выше интенсивности его формирования. Данное положение соответствует результатам анализа динамики толщин покрова (см. гл. 4). Знак «^» над значением параметра указывает, что приведенное далее значение вычисляется по имеющейся выборке наблюдений, т. е. является статистической оценкой истинного значения параметра.

При перечисленных условиях уравнение (3.1) является частным случаем уравнения Бернулли [35], а его решение на этапе формирования покрова и зрелого состояния покрова определяется так называемой логистической кривой

$$h(t) = \frac{H^* h_0 \exp[\alpha_h H^* (T^* t - \int_0^t T dt)]}{H^* + h_0 \exp[\alpha_h H^* (T^* t - \int_0^t T dt)] - 1}, \quad (3.2)$$

где начальный момент времени $t_0 = 0$, h_0 – начальная толщина покрова. Присутствие интеграла от температуры в показателе экспоненты допускает простую интерпретацию: этот член отражает инерцию системы в ответ на внешнее термическое воздействие атмосферы. На этапе разрушения покрова следует выполнить замену: вместо α_h подставить α'_h .

В зависимости от скорости охлаждения надледного слоя воздуха на первичном этапе формирования покрова кривая толщины может иметь точку перегиба

$$h(t_{II}) = \left\{ -\dot{T}(t_{II}) \alpha_h^{-1} [T^* - T(t_{II})]^2 + H^* \right\} / 2.$$

Из этого выражения следует, что при естественных для формирования покрова условиях понижения температуры атмосферы $\dot{T} > 0$. Поэтому независимо от темпа охлаждения воздуха кривая $h(t)$ имеет точку перегиба, и тогда эволюция толщины насчитывает определенный «инкубационный» период, в течение которого при понижении температуры атмосферы собственно и происходит первичное формирование покрова.

В реальных условиях наличие этого периода обусловлено следующим: на предварительном этапе эволюции покрова образуются отдельные скопления зародышей льда; происходит их слипание; акватория района покрывается тонкой пленкой льда, и ее толщина практически не изменяется; а затем следует ускоренный рост толщины до ее предельного значения H^* . Присутствие точки перегиба в динамике толщины проявляется при рассмотрении эмпирической гистограммы ее распределения на рис. 2.8, Б, где на промежутке $[0.3, 0.4]$ имеется явный провал значений гистограммы.

Пропорциональность толщины ее начальному значению h_0 указывает на тот факт, что (3.2) не описывает начальное образование зародышей льда. То есть при использовании этого соотношения полагается, что в начальный момент на акватории уже присутствует хотя бы одна льдина первичной градации толщины. Детальное описание динамики образования зародышей приводится ниже (см. разд. 3.2).

Если T периодическая функция, то результат ее интегрирования сдвинут во времени по отношению к периодичности T . Поэтому имеет место временное запаздывание между минимумом температуры атмосферы T_{\min} и максимумом толщины покрова. Указанная закономерность отмечается в многочисленных исследованиях, а для покрова Японского моря – определяется результатами предыдущего статистического анализа.

Основные отличия (3.2) от других рассмотренных аппроксимирующих соотношений для толщины покрова, в частности (1.2) и (1.3), заключаются в следующем. В большинстве соотношений для толщины ее формализация выполняется на основании параметров самой толщи льда и потоков тепла на обеих ее границах. Здесь же полагается, что термический режим толщи определяется примыкающим к ней слоем надледного воздуха. Особо стоит отметить доступность измерений основного фактора изменения толщины (температуры слоя воздуха), тогда как в остальных моделях требуются еще сведения о потоках тепла через толщу льда.

3.2. КИНЕТИКА ЭВОЛЮЦИИ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

Процесс формирования ледяного покрова характеризуется образованием зародышей льда и их последующим ростом, а также агрегацией отдельных льдин в их непрерывные поля. В этом случае многообразие геометрических форм и размеров морских льдин и вероятностный по своей природе характер взаимодействия между ними позволяют рассматривать их совокупность как статистический ансамбль частиц-льдин (здесь и везде в дальнейшем под термином «частица» понимается отдельная льдина). Л.А. Тимохов [84] и Л.А. Тимохов, Д.Е. Хейсин [85] использовали кинетический подход для построения определяющих эволюцию покрова уравнений, что явилось первым опытом применения этого аппарата в практике исследования ледяного покрова. При этом они ограничились стандартными приемами аппроксимации интеграла столкновений для такого аддитивного параметра системы, как масса льда. А в действительности, при столкновениях образуется льдина с массой, равной сумме масс исходных льдин. Если не учитываются потери площадей льдин при их столкновениях, то это свойство выполняется также и для площадей. Наличие в такой системе набора подобных аддитивных переменных позволяет выполнить детальную формализацию эволюции покрова и получить простые уравнения, доступные аналитическому исследованию.

3.2.1. Формирование ледяного покрова

Формализация совокупного воздействия на ледяной покров термических и динамических процессов выполняется на основании уравнения Больцмана. Если в предшествующих этому уравнению положениях упорядочить частицы по их массам и выполнить его интегрирование по импульсам, то все интегралы упругих соударений исчезают. Если дополнительно выполнить замену $f_k \equiv n_k F_k$, где $\int F_k d^3 p_k \equiv 1$, то на основании уравнения Больцмана получается основное уравнение химической кинетики:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = \sum_{i,j} \beta_{ij} n_i n_j - n_k \sum_l \beta_{kl} n_l,$$

где β_{ij}, β_{kl} отражают число активных соударений между частицами (в химической кинетике они именуется константами скоростей химических реакций); n_i, n_j, n_k, n_l – число частиц или концентрации соответствующих компонент. Здесь для простоты дальнейшего изложения опущен потоковый член. Последнее уравнение особенно полезно для изучения динамики распределения f_k . Так, трансформация определений химической кинетики в термины отдельных градаций льдин приводит к количественному описанию их локального взаимодействия. Характер этого описания имеет статистическую природу, поскольку в состоящих из большого числа частиц системах возникают иные, сугубо статистические или вероятностные, закономерности, отсутствующие в системах с малым числом частиц. В этом случае требуется дальнейшее уточнение β_{ij} и β_{kl} . Если последние коэффициенты являются симметричными функциями своих аргументов, то эти уравнения могут быть использованы для описания динамики агрегации льдин в отдельных районах рассматриваемой акватории моря. В рамках одного района обычно принимается его пространственная однородность, и поэтому взаимодействие льдин в его области может быть представлено как локальное.

Дальнейшая параметрическая детализация этого уравнения выполняется при допущении о том, что массы льдин m_k кратны некоторой минимальной массе m_1 ($m_k \equiv k m_1$). В этом случае после соответствующих изменений обозначений набор $\beta = \{\beta_{ij}\}$ представляет собой верхнюю матрицу Хессенберга, для элементов которой выполняются соотношения: $\beta_{ij} \equiv 0 \forall i, j : i + j \neq k$. Поэтому динамика числа льдин при $k > 1$ определяется уравнением

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} \beta_{ij} n_i n_j - n_k \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{kj} n_j,$$

где первый член описывает процесс формирования льдин k размера вследствие агрегации льдин i -й и j -й их градации ($j \equiv k - i$), а второй – выбывание определенного числа льдин из k -й градации вследствие их агрегации с льдинами произвольной массы. Присутствие коэффициента $\frac{1}{2}$ обусловлено учетом повторного пересчета при суммировании одних и тех же льдин, число разновидностей которых полагается достаточно большим. Уравнения данного класса именуется кинетическим уравнением Смолуховского, а функция β_{ij} – ядром кинетического уравнения коагуляции [43, 74]. По своему физическому смыслу она является симметричной функцией своих аргументов. Ее размерность обратна произведению размерностей $[n_k]$ и $[t]$. Соотнесенная к единице времени, она характеризует

вероятность бинарной агрегации льдин и определяется процессами их сближения, столкновения и слияния. Для описания их совместного эффекта используются, как правило, однородные функции $\beta_{bi,bj} = b^\lambda \beta_{ij}$, где интервал изменения индекса однородности λ представляет собой узкий отрезок вещественной оси [45, 46, 112].

Рассмотрим динамику числа льдин с учетом поступления в систему льдин первичного размера. Пусть M^* – общая масса льда, которая может быть сформирована из доступного для нее ресурса морской воды (понятно, что для льда доступным ресурсом является объем слоя ВКС конкретного района акватории) и $M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k n_k(t)$ – текущая общая масса льда в открытой части акватории рай-

она. Для простоты изложения ограничимся здесь случаем открытых районов моря. В прибрежных районах следует также учитывать льды припая. В этих обозначениях динамика числа льдин первичной массы определяется массой свободного для него ресурса льда $M^* - M$ и наложенным на систему внешним термическим полем атмосферы:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = \alpha_{mn}(T^* - T)(M^* - M) - n_1 \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{1j} n_j,$$

где α_{mn} характеризует соотнесенную к единице доступного ресурса скорость формирования числа первичных льдин при единичном изменении температуры. В данном представлении полагается, что динамика числа льдин первичной массы определяется двумя составляющими. Первая из них характеризует динамику образования первичных льдин из их непосредственных зародышей. Полагается также, что она определяется текущим ресурсом $M^* - M$ и интенсивностью его потребления (отклонением текущей температуры атмосферы от температуры атмосферы начального формирования покрова). Поскольку первичные льдины могут образовываться и при отсутствии льда на акватории, то эта динамика не зависит от текущей массы льда. Вторая составляющая характеризует выбывание определенного числа льдин вследствие их агрегации с льдинами других градаций. Тем самым определяется макроскопическая кинетика образования первичных льдин в условиях понижения температуры среды. Тогда динамика их системы следует уравнению

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = \alpha_{mn}(T^* - T)(M^* - M)\delta_{k1} + (1 - \delta_{k1}) \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} \beta_{ij} n_i n_j - n_k \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{1j} n_j, \quad (3.3)$$

где δ_{k1} – символ Кронекера. Представленная модель характеризует динамику пространственно-ограниченной системы при наличии в ней источника льдин первичной градации, где режим изменения внешних условий определяется заданным профилем температуры.

Согласно (3.3) моменты $\hat{t}_k (k = 1 \div K)$ максимумов числа льдин для отдельных градаций не совпадают между собой. Действительно, при их совпадении правые части уравнений системы в этот момент обращались бы в нуль. Тогда правая часть уравнения для динамики льдин последней градации $\sum_{i+j=k} \beta_{ij} n_i n_j$

также равнялась бы нулю, что противоречит положительности ядра системы: сумма положительных чисел равна нулю только в случае, когда каждое слагаемое равно нулю. Поэтому временной ресурс системы делится на не перекрывающиеся между собой промежутки, где число льдин отдельных градаций достигает своих максимальных значений.

Для изучения поведения решений системы оказываются полезными сведения о динамике общего числа льдин n и их полной массы m . Вывод уравнения для n получается суммированием (3.3) при допущении о свободной переменной порядке суммирования. Уравнение для полной массы льдин получается умножением (3.3) на $m_k \equiv km_1$ и суммированием последних при том же самом допущении. Результатом таких операций является система

$$\begin{cases} \dot{N} = \alpha_{mn} (T^* - T)(M^* - M) - \frac{1}{2} \sum_{k,j} \beta_{kj} n(m_k) n(m_j) \\ \dot{M} = \alpha_{mn} m_1 (T^* - T)(M^* - M) \end{cases} \quad (3.4)$$

При выполнении рассмотренных выше положений следует, что полная масса системы отдельных льдин для произвольных начальных условий не зависит от особенностей процессов их агрегации и определяется выражением

$$M = M^* \{1 - \exp[-\alpha_{mn} m_1 (T^* - \bar{T}) t]\},$$

где $\bar{T} = \frac{1}{t} \int_0^t T dt$ – текущая средняя температура надледного слоя воздуха. Инте-

ресно заметить, что аналогичную форму выражения для экстенсивной переменной системы первичных объектов (первичных льдин или их зародышей) можно получить на основании несколько иных положений о характере их динамики. Так, при изучении кинетики островкового роста анодно-искровых покрытий, на основании несколько отличающихся допущений относительно динамики подобной M экстенсивной переменной системы, было получено идентичное соотношение для описания механизма заполнения образца новой фазой [105].

В большинстве конкретных приложений ядро β_{ij} является однородной функцией определенных свойств исходных объектов (массы, одной из геометрических характеристик, суммы дробных степеней номеров) [15, 16]:

$$1. \beta_{ij} \equiv 2b_1; \quad (3.5a)$$

$$2. \beta_{ij} \equiv b_2(m_i + m_j); \quad (3.5б)$$

$$3. \beta_{ij} \equiv 2b_3m_im_j; \quad (3.5в)$$

$$4. \beta_{ij} \equiv 2[b_4 + b_5(m_1 + m_2) + b_6m_1m_2]. \quad (3.5г)$$

Здесь $b_1 \div b_6$ – неотрицательные коэффициенты пропорциональности, которые в некоторых случаях могут быть функциями времени (для удобства примем именно такую форму представления ядер); m_i, m_j – массы льдин. В первом случае процесс агрегации не зависит от индивидуальных свойств отдельных льдин, и тогда он имеет смысл среднестатистической закономерности. Во втором и третьем случаях агрегация зависит от масс льдин. Различия второго и третьего случаев становятся ясными при дальнейшем рассмотрении. Четвертый тип ядра есть обобщение первых трех случаев – он представляет собой их линейную суперпозицию. Очевидно, что именно данный тип ядра целесообразно использовать в численных расчетах. Исследование поведения решений (3.4) рассмотрим для случая пространственно однородной среды, где функции β_{ij} представлены перечисленными выше случаями (3.5а)–(3.5в).

1. В случае (3.5а) постоянного ядра динамика N определяется классом специальных уравнений Риккати [35]:

$$\dot{N} = \alpha_{mn}(T^* - T)(M^* - M) - b_1N^2,$$

а динамика числа льдин различных градаций – системой рекуррентных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = \alpha_{mn}(T^* - T)(M^* - M) - 2b_1Nn_1 \\ \dot{n}_k = b_1 \left(\sum_{i+j=k} n_in_j - 2Nn_k \right) \end{cases}.$$

При заданной функции N значения n_k последовательно вычисляются на основании рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} n_1 = \alpha_{mn} \int_0^t (T^* - T)(M^* - M) \exp(-2b_1 \int_\tau^t N d\tau) d\tau \\ n_k = b_1 \int_0^t \sum_{i+j=k} n_in_j \exp(-2b_1 \int_\tau^t N d\tau) d\tau \end{cases}.$$

Аналитическое решение для общего числа льдин N не может быть выражено в квадратурах, и поэтому оно должно определяться численными методами. В этом случае только качественный анализ позволяет выявить основные свойства решения уравнения, не исследуя его численными методами. Качественное исследование показывает вполне естественное протекание процесса: вследствие

заданных начальных условий $N|_{t=0} = 0$ при монотонном росте общей массы отдельных льдин на первичном этапе формирования покрова порядок первого члена существенно выше второго, поэтому N монотонно возрастает. А при больших временах t , когда масса M достаточно близка к своему конечному значению M^* – наоборот, порядок первого члена существенно меньше второго и тогда N монотонно убывает. Поэтому существует такой момент времени, где $\dot{N} = 0$ или общее количество льдин достигает своего максимума.

Из уравнений для \dot{N} и \dot{n}_1 непосредственно следует

$$\frac{d(n_1 - N)}{dt} = b_1 N (N - 2n_1).$$

Поскольку при $n_1 \leq N/2$ функция $n_1 - N$ является монотонно убывающей, то характер изменения общего количества льдин в основном следует изменению числа первичных льдин. При этом в момент максимального значения число последних равно половине общего количества льдин. Если \hat{t}_k моменты максимумов числа льдин отдельных градаций, то $\dot{n}_k(\hat{t}_k) = 0$ и

$$n_{k,\max} = \frac{n_1(\hat{t}_k)n_{k-1}(\hat{t}_k)}{2N} + \frac{1}{2N(\hat{t}_k)} \sum_{i=2}^{k-1} n_{k-1}(\hat{t}_k)n_i(\hat{t}_k).$$

Замена членов произведения под знаком суммы на их максимальные значения приводит к неравенству:

$$n_{k,\max} \leq \frac{n_{k-1}(\hat{t}_k)}{2[1 + n_1^{-1}(\hat{t}_k) \sum n_i(\hat{t}_k)]} + \frac{1}{8N(\hat{t}_k)} \sum_{i=2}^{k-1} \frac{1}{[1 + r_{k-1}(\hat{t}_{k-1})]} \times \frac{1}{[1 + r_i(\hat{t}_i)]},$$

где $r_i(\hat{t}_i) = n_{i,\max}^{-1} \sum_{j \neq i} n_j(\hat{t}_i)$. Так как порядок первого слагаемого существенно выше порядка второго слагаемого, то именно оно определяет значение $n_{k,\max}$. Поэтому для всех типов льдин максимумы их числа образуют убывающую последовательность, или имеет место иерархия следования максимумов.

2. В случае (3.5б), когда ядро пропорционально сумме масс, динамика N и его численное значение определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \alpha_{mn} (T^* - T)(M^* - M) - b_2 MN, \\ N(t) &= \alpha_{mn} \int_0^t (T^* - T)(M^* - M) \exp(-b_2 \int_{\tau}^t M d\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Динамика числа льдин различных градаций задается системой рекуррентных уравнений

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = \alpha_{mn}(T^* - T)(M^* - M) - 2b_2(m_1N + M)n_1 \\ \dot{n}_k = b_2[km_1 \sum_{i+j=k} n_i n_j - 2(km_1N + M)n_k] \end{cases} .$$

При заданной функции N значения n_k последовательно вычисляются на основании рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} n_1 = \alpha_{mn} \int_0^t (T^* - T)(M^* - M) \exp[-2b_2 \int_\tau^t (m_1N + M) d\tau] d\tau \\ n_k = b_2 m_1 k \int_0^t \sum_{i+j=k} n_i n_j \exp[-2b_2 \int_\tau^t (km_1N + M) d\tau] d\tau \end{cases} .$$

Качественное исследование проводится по сценарию предыдущего случая:

$$\frac{d(n_1 - N)}{dt} = b_2 M \left[N - 2 \left(\frac{m_1}{M} N + 1 \right) n_1 \right].$$

Для данного типа ядра максимальное число льдин первичной градации есть

$$n_{1,\max} = \frac{N(\hat{t}_1)}{2} \left[\frac{m_1}{M(\hat{t}_1)} N(\hat{t}_1) + 1 \right]^{-1} .$$

Если значение выражения в квадратных скобках больше единицы, в момент \hat{t}_1 на долю первичных льдин приходится меньшее, по сравнению с предыдущим случаем, значение их общего числа. Для других градаций льдин выполняется такая же ситуация.

3. В случае (3.5в), когда ядро пропорционально произведению $\beta_{ij} = 2b_3 m_i m_j$, динамика N и его численное значение определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \alpha_{mn}(T^* - T)(M^* - M) - b_2 M, \\ N(t) &= \alpha_{mn} \int_0^t (T^* - T)(M^* - M) dt - b_3 \int_0^t M^2 dt. \end{aligned}$$

Согласно им \dot{N} характеризуется общей массой частиц M и только косвенным образом зависит от общего числа частиц в системе. Указанное свойство отличает рассматриваемый случай от предыдущих ситуаций. Момент $t = \hat{t}$ их максимального значения задается решением уравнения, следующего из приравнивания нулю правой части уравнения для \dot{N} после подстановки значений $T(\hat{t})$ и $M(\hat{t})$. Динамика числа льдин определяется системой линейных рекуррентных уравнений

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = \alpha_{mn}(T^* - T)(M^* - M) - 2b_3 m_1 M n_1 \\ \dot{n}_k = b_3 m_1 (m_1 \sum_{i+j=k} ij n_i n_j - 2k M n_k) \end{cases} .$$

Значения n_k последовательно вычисляются на основании рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} n_1 = \alpha_{mn} \int_0^t (T^* - T)(M^* - M) \exp[-2b_3 m_1 \int_\tau^t M d\tau] d\tau \\ n_k = b_3 m_1^2 \int_0^t \sum_{i+j=k} ij n_i n_j \exp(-2b_3 m_1 k \int_\tau^t M d\tau) d\tau \end{cases}$$

Динамика разности $n_1 - N$ следует уравнению

$$\frac{d(n_1 - N)}{dt} = b_3 M (M - 2m_1 n_1).$$

В этом случае $n_{1,\max}$ определяется значением общей массы льда $M(\hat{t}_1)$ и только косвенным образом зависит от числа льдин остальных градаций. Здесь, как и в предыдущих случаях, временной ресурс системы льдин делится на неперекрывающиеся промежутки, где отдельные их градации достигают своих максимумов.

Во всех перечисленных случаях реализация механизма эволюции является двухстадийной. На так называемой дивергентной стадии [72, 69] происходит увеличение разнообразных свойств системы: растет как общее число отдельных льдин, так и количество их разнообразных форм. Существование этой стадии обусловлено тем обстоятельством, что в системе происходит поиск новых возможностей ее существования. На второй стадии уменьшается как число отдельных льдин, так и разнообразие их форм. В данном случае система и ее отдельные элементы эволюционируют таким образом, чтобы наилучшим способом приспособиться к термическому режиму внешней среды. Указанной ситуации соответствуют конвергентная стадия эволюции и процессы адаптации в их классическом представлении. При этом первая стадия подготавливает условия для выполнения второй. Агрегация же льдин обуславливает сокращение длительности первой стадии. Кроме того, выполнение наблюдаемых в реальных условиях простых свойств системы льдин указывает на адекватность предлагаемого механизма формирования ледяного покрова.

В процессе эволюции покрова вместе с агрегацией отдельных льдин имеет место обусловленная их термическим воздействием индивидуальная динамика массы – массы льдин могут изменяться и без приведения в действие цепочки их бинарной агрегации. Для учета этого обстоятельства надо дискретную модель градаций льдин трансформировать в ее непрерывный вариант и определить механизм перераспределения массы отдельной льдины из одной ее градации в последующие градации. Процедура трансформации выполняется стандартным образом: вводится плотность распределения льдин по массам $n(m, t)$ (здесь используются те же обозначения, что и при выводе). Тогда число льдин с массами из

интервала $(m, m + \Delta m)$ равно $n(m, t)\Delta m$, а $n_k \equiv n(km_1, t)m_1$. Для формализации перераспределения достаточно рассмотреть соответствующий поток масс льда $\dot{m}n$ в фазовом пространстве их системы. Тогда указанный механизм характеризуется разностью соответствующих потоков, которая соотнесена к приращению массы. По существу, плотность распределения $n(m, t)$ удовлетворяет уравнению неразрывности, которое для рассматриваемой ситуации принимает форму

$$\frac{\partial n_m}{\partial t} + \frac{\partial \dot{m}n_m}{\partial m} = S_m, \quad (3.6)$$

$$S_m = \frac{1}{2} \int_{m_1}^m \beta(m - m', m') n_m(m - m') n_m(m') dm' - n_m \int_{m_1}^{M^*} \beta(m, m') n_m(m') dm',$$

где $\dot{m} \equiv \frac{dm}{dt}$ – скорость термического роста отдельной льдины (для простоты изложения опущен член, ответственный за дрейф льдин); S_m характеризует динамику агрегации льдин. Здесь агрегация льдин является одной из форм самоорганизации подобных систем – необратимого процесса, который в результате кооперативного действия подсистем приводит к образованию более сложных структур всей системы [111]. При этом самоорганизация представляет элементарный процесс эволюции, которая состоит из неограниченной последовательности процессов самоорганизации.

Понятно, что структура уравнения термической динамики массы отдельной льдины не отличается от структуры уравнения ее толщины. Для пояснения этого обстоятельства необходимо принять форму отдельной льдины в виде некоторой пластины определенной толщины и длины. Недопустимым является принятие шарообразной формы льдины – как правило, длина льдины превосходит толщину. Исключение составляют ледовые образования типа айсбергов, но на акватории Японского моря они отсутствуют. Тогда каждой единице площади льдины соответствует индивидуальный ресурс ее толщины, на который, кроме этой единицы площади, нет других подобных «претендентов». Массы же льдин согласованно «разделяют между собой» их общий ресурс $M^* - M$, где $M = \int_{m_1}^{M^*} mn_m dm$

– текущая полная масса льда в открытой части акватории района (напомним, что для прибрежных районов следует также учитывать текущую массу припая). При этом сохраняется допущение о том, что динамика массы отдельной льдины пропорциональна $T^* - T$ и текущей величине ее ресурса. Поэтому после введения соответствующего неотрицательного коэффициента пропорциональности α_m уравнение динамики массы отдельной льдины принимает вид

$$\dot{m} = \alpha_m (T^* - T)(M^* - M)m. \quad (3.7)$$

В контексте этой модели α_m соответствует относительному изменению массы отдельной льдины за единицу времени, которое соотнесено к единице доступного ресурса и единице изменения температуры атмосферы. Необходимо заметить, что ошибочным является использование в качестве полной массы льда интеграла от произведения (3.7) на плотность распределения числа льдин по их массам. В этом случае (3.7) трансформируется в уравнение

$$\dot{M} = \alpha_m (T^* - T)(M^* - M)M . \quad (3.7a)$$

Его решение имеет аналогичную (3.2) форму. Как и в последнем случае, динамика $M(t)$ имеет точку перегиба. Что также обуславливает наличие начального «инкубационного» периода ее динамики, когда собственно и формируется первоначальная пленка льда. Поскольку его решение пропорционально значению M в начальный момент, то при нулевом начальном условии это уравнение теряет свой физический смысл – масса остается нулевой при любом внешнем изменении температуры. В связи с чем для рассмотрения полного цикла эволюции покрова важен первоначальный этап формирования льдин из их зародышей. Для учета данного обстоятельства в третий сомножитель должен быть добавлен соответствующий член, который характеризует образование льдин на первом этапе. В дальнейшем этот тип льдин именуется первичными льдинами.

Поведение потоков на крайних границах диапазона изменения их масс естественно задать в виде

$$\begin{aligned} \dot{m} \Big|_{m=m_1} &= \alpha_{mn} (T^* - T)(M^* - M) \\ \dot{m} \Big|_{m=M^*} &= 0 \end{aligned} . \quad (3.8)$$

Первое из них задает поток первичных льдин, а второе условие – пространственную ограниченность среды или отсутствие потока массы за правую границу диапазона ее изменения. Система уравнений (3.6)–(3.7) при граничном условии (3.8) определяет модель формирования масс ледяного покрова.

Структура модели (3.6) становится очевидной при рассмотрении изменения полной массы льда. Для вывода уравнения ее временного изменения сначала умножим (3.6) на m , а затем выполним интегрирование полученного балансового соотношения по всем массам присутствующих на акватории района льдин:

$$\dot{M} = (T^* - T)(M^* - M)(\alpha_{mn}m_1 + \alpha_m M) .$$

Правая часть этого уравнения насчитывает два слагаемых, каждое из которых соотнесено к единице времени. Первое из них характеризует приток массы первичных льдин, и его роль существенна в начальные моменты формирования покрова, а второе – совокупный приток масс льдин различных градаций. Его значимость проявляется в последующие моменты. Поскольку рассматривается

полный цикл эволюции покрова, то начальное условие полагается нулевым. В этом случае кривая изменения полной массы системы льдин определяется выражением

$$M(t) = M^* \frac{\exp[\alpha_{mn} m_1 (1+c)(T^* - \bar{T})t] - 1}{\exp[\alpha_{mn} m_1 (1+c)(T^* - \bar{T})t] + c}, \quad (3.9)$$

где $c = \frac{\alpha_m M^*}{\alpha_{mn} m_1}$; $\bar{T}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t T dt$ – текущая средняя температура надледного слоя

воздуха. Необходимо заметить, что при выбранных нулевых начальных условиях и произвольном значении меры интенсивности формирования первичных льдин $\alpha_{mn} m_1$ соотношение (3.9) не сводится к решению (3.7а), что обусловлено физической сущностью различий этих моделей. При этом они отличаются между собой только в начальный период эволюции, когда в зависимости от температуры атмосферы и величины c кривая (3.9) может иметь или нет точку перегиба. Действительно, согласно выражению для второй производной от полной массы ее значение в точке перегиба t_{II} определяется соотношением

$$M(t_{II}) = \{-\dot{T}(t_{II})[T^* - T(t_{II})]^2 + \alpha_{mn} m_1 (c+1)\} / 2\alpha_m.$$

Понятно, что $M(t_{II}) < M^*$. Следовательно, при нарушении этого неравенства, а именно

$$-\dot{T} \geq \alpha_{mn} m_1 (T^* - T)^2 (c-1),$$

кривая массы не имеет точки перегиба. При естественных для формирования покрова условиях понижения температуры атмосферы $-\dot{T} > 0$ это условие всегда выполняется при $c \leq 1$. Данное условие является достаточным и для случая $\dot{T} = 0$, т. е. когда при одной и той же отрицательной температуре воздуха и $T^* > T$ имеет место быстрое промерзание небольших водоемов. При $c > 1$ реализация указанной ситуации определяется темпом понижения температуры.

Характер следования кривой (3.9) подобен форме кривой (3.2). Действительно, согласно выражению для второй производной от полной массы ее значение в точке перегиба t_{II} определяется соотношением

$$M(t_{II}) = \{-\dot{T}(t_{II})[T^* - T(t_{II})]^2 + \alpha_{mn} m_1 (c+1)\} / 2\alpha_m.$$

При естественных для формирования покрова условиях понижения температуры атмосферы $\dot{T} > 0$ выражение в фигурных скобках всегда больше нуля. Поэтому эволюция массы льда насчитывает определенный «инкубационный»

период, в течение которого при понижении температуры атмосферы собственно и происходит первичное формирование покрова.

Столь подробное выяснение обстоятельств наличия перегиба кривой $M(t)$ может быть использовано при установлении численного порядка $\alpha_{mn}m_1$ и α_m , а также для оценки их численных значений.

Применимость рассмотренного подхода ограничена ситуацией, когда масса льдины отражает определенный этап ее эволюции. В реальных условиях указанное свойство выполняется только для припая, а для льдин открытого моря в период их весеннего таяния и разрушения это не соответствует действительности – среди их общего многообразия встречаются льдины различных стадий развития с одной и той же массой. Подобная ситуация наиболее типична для весеннего этапа эволюции. Вследствие сказанного для более детальной картины эволюции покрова целесообразно построение модели, где на основании приведенных выше логических схем рассматривается совместное изменение площадей льдин и их толщин.

Для параметризации определяющих дискретную модель уравнений примем допущения:

- 1) каждой стадии эволюции отвечает льдина с характерными для этой стадии размерами толщины h и площадью основания a ;
- 2) площади оснований кратны площади первичной льдины a_1 ;
- 3) при столкновениях льдин потерями их площадей можно пренебречь;
- 4) при агрегации льдин различных толщин происходит выравнивание их площадей, которое имеет диффузионную природу.

Согласно первому допущению всю совокупность льдин можно упорядочить по их геометрическим размерам. При этом конкретная геометрия формы льдины не является определяющей. А согласно третьему допущению площадь отдельной льдины представляет собой аддитивную переменную системы. Тогда динамика числа льдин n_{kl} с площадью основания a_k и толщиной h_l удовлетворяет подобным (3.3) уравнениям. В его правой части: первый член есть $\alpha_{ah}(T^* - T)(A^* - \sum_{i,j} a_i n_{ij})\delta_{k,1}\delta_{l,1}$, α_{ah} – неотрицательный коэффициент пропорциональности (его физический смысл такой же, как и α_{mn} из модели (3.4)); A^* –

максимально возможная площадь льдины или площадь отдельного района; второй и третий члены относятся к льдинам только данной толщины. В моделях эволюции ледяного покрова в качестве A^* выступает единица, и тогда его площадь в отдельном районе именуется сплоченностью. Однако районы акватории Японского моря имеют различные площади (см. рис. 2.1), и поэтому замена данной величины единицей представляет собой грубое приближение и является неприемлемой для реальной ситуации.

В этом уравнении также должен присутствовать член, который характеризует перераспределение числа льдин из одних градаций толщин в другие при

столкновениях льдин различных толщин. Здесь указанный член записывается сразу для непрерывного варианта модели, где распределение льдин $n_{ah}(a, h)$ с площадями из интервала $(a, a + \Delta a)$ и толщинами из интервала $(h, h + \Delta h)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial n_{ah}}{\partial t} + \frac{\partial \dot{a} n_{ah}}{\partial a} + \frac{\partial \dot{h} n_{ah}}{\partial h} = D_{ah} \frac{\partial^2 n_{ah}}{\partial h^2} + S_{ah} \quad (3.10)$$

$$S_{ah} = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \beta(m_{ah} - m_{a'h}, m_{a'h}) n_{ah}(a - a') n_{ah}(a') da' - n_{ah} \int_{a_1}^{A^*} \beta(m_{ah}, m_{a'h}) n_{ah}(a') da',$$

где D_{ah} – эмпирический коэффициент диффузии площадей различных толщин (при отсутствии его экспериментальных значений его статистическую оценку следует выполнить на основании выборки данных натуральных измерений); $\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}$ – скорость термического роста площади отдельной льдины, параметрический вид которой определим следующим образом:

$$\dot{a} = \alpha_a (T^* - T)(A^* - A)a$$

$$A = \int_{h_1}^{H^*} \int_{a_1}^{A^*} a n_{ah} da dh, \quad (3.11)$$

где α_a – неотрицательный коэффициент пропорциональности (его физический смысл такой же, как и α_m из модели (3.7)); A – общая площадь льда на акватории района; h_1 – толщина первичной льдины. Представляется, что именно указанное выражение является достаточно адекватной аппроксимацией реальной динамики площади отдельной льдины. Действительно, в начальный момент эволюции на акватории образуются только микроскопические зародыши льда, из которых затем формируются первичные льдины. Льдины остальных типов отсутствуют. Равны нулю и соответствующие выражения для скорости роста, что является следствием их пропорциональности площадям. Дальнейшее сочетание процессов образования зародышей, роста их площади и последующей агрегации приводит к образованию льдин различных градаций площадей. Поэтому динамика площади отдельной льдины (3.11), как и динамика ее массы, определяется текущим значением данного динамического параметра состояния льдины и доступным для нее ресурсом льда.

При записи выражения для S_{ah} учитывается тот факт, что взаимодействие отдельных льдин осуществляется в терминах и понятиях их масс, а не их площадей. И это соответствует физической сущности процесса агрегации льдин – взаимодействуют массы льдин, а не их площади или толщины.

Для корректности постановки задачи следует принять аналогичные (3.8) граничные условия:

$$\begin{aligned}
 \dot{a}n_{ah} \Big|_{a=a_1, h=h_1} &= \alpha_{ah}(T^* - T)(A^* - A) \\
 \dot{h}n_{ah} \Big|_{a=a_1, h=h_1} &= 0 \\
 \dot{a}n_{ah} \Big|_{a=a_1, h \neq h_1} &= \dot{a}n_{ah} \Big|_{a \neq a_1, h=h_1} = \dot{a}n_{ah} \Big|_{a=A^*} = 0, \\
 \dot{h}n_{ah} \Big|_{a=a_1, h \neq h_1} &= \dot{h}n_{ah} \Big|_{a \neq a_1, h=h_1} = \dot{h}n_{ah} \Big|_{h=H^*} = 0
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

следуя которым, в системе первоначально могут появляться только льдины с площадями из интервала $(a_1, a_1 + \Delta a)$ и толщинами из интервала $(h_1, h_1 + \Delta h)$. Второе условие (3.12) отражает сущность различий a и h как динамических переменных эволюции покрова: прежде чем происходит изменение толщины h , на акватории района формируется тонкая пленка льда. Выполнимость этого условия также обуславливает тот факт, что при выводе уравнения для эволюции общей площади покрова (3.15) дважды не пересчитываются льдины первичного размера.

На основании уравнений (3.10)–(3.12) можно получить модель распределения суммарной площади льда по его отдельным грациям толщинам. Целесообразность ее использования обусловлена следующим: в некоторых случаях столь подробное описание (3.10) не требуется и достаточно ограничиться сведениями о распределениях суммарных величин. Кроме того, эта модель полезна для статистического оценивания набора параметров в модели эволюции площадей ледяного покрова. Для ее вывода следует сначала умножить (3.10) на a и затем выполнить интегрирование по всему диапазону изменения площадей. Тогда

$A_h(h, t) = \int_{a_1}^{A^*} an(a, h, t) da$ есть общая площадь льда толщины h , а интеграл от

первого члена $\int_{a_1}^{A^*} a \frac{\partial n(a, h, t)}{\partial t} da$, равный $\frac{\partial A_h}{\partial t}$, определяет ее временное изменение. Интеграл от второго члена определяется выражением

$a \dot{a}n_{ah} \Big|_{a=A^*, h} - a \dot{a}n_{ah} \Big|_{a=a_1, h} - \int_{a_1}^{A^*} \dot{a}n_{ah} da$, первый член которого обращается в нуль

вследствие условий (3.12). Второй член отличен от нуля только при $h = h_1$. В этом случае он характеризует динамику потока формирования первичных льдин

и равен $\alpha_{ah}(T^* - T)(A^* - A)a_1$. Третий член $\int_{a_1}^{A^*} \dot{a}n_{ah} da$ характеризует прирост

площади льда, который обусловлен термическим воздействием атмосферы. Его численное выражение следует после подстановки сюда соотношения для \dot{a} из

(3.11). Интеграл от третьего члена левой части (3.10) равен $\frac{\partial \dot{h}A_h}{\partial h}$. В правой час-

ти: $\int_{a_1}^{A^*} aS_{ah}da$ равен нулю, поскольку при перераспределении площадей льдин в рамках отдельной градации толщины их общая площадь не изменяется. Таким образом, динамика площадей льда A_h толщины h определяется уравнением

$$\frac{\partial A_h}{\partial t} + \frac{\partial \dot{h}A_h}{\partial h} = D_{ah} \frac{\partial^2 A_h}{\partial h^2} + (T^* - T)(A^* - \int_{h_1}^{H^*} A_h dh)(\alpha_{ah}a_1\delta_{h,h_1} + \alpha_a A_h). \quad (3.13)$$

Согласно этому уравнению скорость прироста площади тонкого льда насчитывает две составляющие, первая из которых обусловлена непосредственным формированием первичных льдин, а другая – приростом площади тонкого льда отдельных льдин. Подобные (3.12) граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{h}A_h \big|_{h=h_1} &= 0 \\ \dot{h}A_h \big|_{h=H^*} &= 0 \end{aligned}$$

Если теперь выполнить интегрирование (3.13) по всему диапазону изменения толщин, то в результате получим уравнение динамики общей площади льда:

$$\dot{A} = (T^* - T)(A^* - A)(\alpha_{ah}a_1 + \alpha_a A). \quad (3.14)$$

При выводе этого уравнения полагается равенство нулю диффузионного потока площади льда первой градации толщины, т. е. при агрегации отдельных льдин различной толщины выравнивание их площадей происходит без учета площади чистой воды. Для решения этого уравнения справедливы все положения, которые выполняются для (3.9), а именно наличие точки перегиба при временном изменении площади A . Присутствие дополнительного слагаемого в третьем множителе обуславливает сокращение периода формирования и наступление более ранних сроков зрелого состояния покрова, чем при его отсутствии.

В прибрежных районах при определении текущего значения ресурса льда необходимо учитывать значение массы и площади его припая. Для этого в соответствующие множители правых частей следует ввести дополнительный член, который характеризует льды припая. Так, общий ресурс массы и площади льда в этих районах определяется выражениями $M^* - M - M^{(B)}I_{x,y}$ и $A^* - A - A^{(B)}I_{x,y}$, где $M^{(B)}$ и $A^{(B)}$ – общая масса и площадь припая; $I_{x,y}$ – индикатор равный 1 или 0, в зависимости от того является район прибрежным или нет; x и y – географические координаты района акватории.

Сущность рассматриваемого подхода составляет разделение эволюции системы на ее первичные и вторичные составляющие. Первичным законам подчиняется поведение отдельных частиц (объектов рассматриваемой системы, в данном случае зародышей первичных льдин), в то время как вторичные законы применимы к совокупностям, или ансамблям, атомов или молекул [68]. В настоящем рассмотрении первичные законы обуславливают формирование из зародышей льда льдин первой градации (массы, площади и толщины), а вторичные – процессы самоорганизации, которые приводят к последующей эволюции системы. Непосредственной причиной подобного разделения является принятая здесь система градаций – в отличие от традиционно используемой в практике системы градаций льда в моделях типа (1.9) открытая вода и первичный лед представляют собой отдельные физические состояния воды.

3.2.2. Дробление ледяного покрова

Дробление ледяного покрова вызывается уменьшением сил молекулярного сцепления между составными частями массивов льда. Выделяется два типа причин, следствием проявления которых является самопроизвольное и вынужденное дробление покрова. Первый тип дробления обусловлен термическим воздействием атмосферы и наличием в ледяном покрове градиента напряженности. Его присутствие может быть вызвано многими факторами: взаимодействием покрова с водой при больших относительных скоростях, наличием в толще льда пустот и микротрещин, усталостным разрушением покрова и т. д. Вынужденное дробление происходит при столкновениях льдин, когда они имеют достаточно большие относительные скорости. Соотношение (1.10) может быть использовано в качестве аппроксимации дробления этого типа. Однако простые оценки его вклада показывают несущественное, по сравнению с процессом первого типа, влияние вынужденного дробления на эволюцию покрова Японского моря. Поэтому в дальнейшем рассмотрении оно отсутствует.

Для описания дискретного варианта самопроизвольного дробления льдин следует принять ряд допущений [16]: в системе существуют случайные перемешивающие силы; продукты дробления настолько быстро перемешиваются, что поведение льдин между актами дробления и их агрегацией можно считать статистически независимым. В этом случае схематическая запись кинетического уравнения принимает вид

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = S_m(n_k) + R_m(n_k),$$

где первый член характеризует агрегацию льдин, а второй – их самопроизвольное дробление. Второе слагаемое в правой части представляет разность двух членов: первый из них представляет собой число прибывающих в k -ю градацию

льдин вследствие дробления льдин более высоких градаций, а второй – число льдин, убывающих из этой градации в предшествующие ей. Случайный характер дробления льдин (случаен сам факт распада льдин, и случайным является число образующихся при этом льдин) обуславливает необходимость привлечения для формализации дробления терминов и понятий вероятностного описания процесса. Представляется, что в данном случае дробление льдин можно описать с помощью процесса рождения–гибели частиц. В зависимости от внешних условий каждая льдина может «породить» некоторое случайное число своих различных «потомков», каждый из которых, за исключением представителей первичной градации выбранного свойства льдин (массы или площади), может стать источником следующего поколения льдин.

Пусть $P_m(k)$ обозначает вероятность распада за единицу времени льдины k -й градации массы и $\gamma_m(k', k)$ обозначает вероятность появления за единицу времени льдины этой градации в результате распада льдины k' -й градации. Далее подобные построения выполняются для распределений других свойств льдин. Поэтому, чтобы различать их между собой, им приписан индекс рассматриваемого свойства. Первый аргумент функции дробления $\gamma(k', k)$ указывает на порядковый номер градации льдины-источника, а второй – на номер градации результата дробления. Понятно, что она не является симметричной функцией по отношению к перестановке аргументов. В этих обозначениях динамика дробления определяется соотношением

$$R_m(n_k) = \sum_{k'=k+1}^{\infty} \gamma_m(k', k)n_{k'} - P_m(k)n_k.$$

Функциональная зависимость между $P_m(k)$ и $\gamma_m(k', k)$ обусловлена тем обстоятельством, что общая масса системы (площадь покрытия в пренебрежении потерь площадей при столкновениях льдин) не изменяется

$$\sum_{k=1}^{\infty} kR_m(n_k) = 0,$$

что приводит к $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k'=k+1}^{\infty} k\gamma_m(k', k)n_{k'} = \sum_{k=1}^{\infty} kP_m(k)n_k$.

Поменяв в левой части последнего соотношения порядок суммирования, приходим к соотношению

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k \left[kP_m(k) - (1 - \delta_{k,1}) \sum_{k'=1}^{k-1} k'\gamma_m(k, k') \right] = 0.$$

Поскольку оно должно выполняться для любых значений n_k , то

$$R_m(n_k) = \sum_{k'=k+1}^{\infty} n_{k'} \gamma_m(k', k) - n_k P_m(k) \text{ и } P_m(k) = \frac{1}{k} \sum_{k'=1}^{k-1} k' \gamma_m(k, k') (1 - \delta_{k,1}).$$

Для вычисления $R_m(n_k)$ и $P_m(k)$ требуется указать модель дробления. В простейших ее вариантах обычно рассматриваются случаи, когда составная частица распадается на отдельные мономеры [16, 46]. В частности, если вероятность дробления γ^* не зависит от масс частиц, то $\gamma_m(k, k') = k \gamma^* \delta_{k',1}$. Если же вероятность дробления составной частицы на мономеры зависит от их массы, то тогда модель дробления имеет вид $\gamma_m(k, k') = k P_m(k) \delta_{k',1}$. При таком подходе допускаются также ситуации, когда отношение массы результата распада к исходной массе достигает определенного значения c , т. е. $\gamma_m(k, k') = P_m(k) [\delta_{k', k/c} + \delta_{k', k(1-c)/c}]$. В этом случае льдины после деления прибывают в разные размеры: исходная – в размер $k = k/c$, а «дочерняя» – в размер $k(1-c)/c$. Необходимо отметить, что модели подобного типа являются неприемлемыми для реальных ситуаций, где основными действующими факторами дробления выступают составляющие наложенного на систему внешнего поля, массы льдин-источников и массы результатов дробления. Детализацию функции дробления целесообразно выполнить в терминах непрерывных распределений масс льдин.

При использовании дискретного варианта процесса дробления полагается, что льдина-источник и продукты ее распада представляют собой набор льдин первичной градации (массы или площади). Более естественна ситуация, когда размеры продуктов распада принимают произвольные значения. При этом их нижний предел определяется размерами первичной льдины. Тогда для описания процесса дробления целесообразно использовать его непрерывный вариант. В этом случае соотношения для $R_m(n_k)$ и $P_m(k)$ принимают вид

$$R_m(n) = \int_m^{M^*} n(m') \gamma_m(m', m) dm' - n(m) P_m(m) \text{ и } P_m(m) = \frac{1}{m} \int_{m_1}^m m' \gamma_m(m, m') dm'.$$

Интерпретация функции $\gamma_m(m, m')$ такая же, как и функции $\gamma_m(k, k')/m_1$: она определяет вероятность образования льдин массой m' при распаде льдины массой $m > m'$ и нормирована таким образом, чтобы выполнялось соотношение для вероятности распада $P_m(m)$. Ее размерность обратная размерности массы.

Многочисленные модели дробления, как правило, имеют статистический характер, основу которого составляют априорные представления о механизме дробления. Здесь прилагательное «статистический», как и везде в дальнейшем, указывает на определенную тенденцию процесса дробления, когда он характеризуется усредненными параметрами. Функция логнормального распределения может служить частным видом аппроксимации этого механизма. Однако для

статистического описания процесса дробления льдин различных масс допущения А.Н. Колмогорова о характере их дробления [40] выполняются с определенной степенью точности. Наименее обоснованным из них является допущение о независимости вероятностей каждой частицы-льдины раздробиться за единственный промежуток времени на то или иное число частей от размеров исходной частицы. Тем не менее различного рода наблюдения и эксперименты (золотин в золотоносных россыпях, последовательное дробление кусков горной породы во вращающихся барабанах металлическими шарами [71], оценка прочности образцов оптических волокон [63] и т. д.) указывают на логнормальное распределение фрагментов по крупности, а дробление во взрывной волне – распределение Вейбулла, которое является частным случаем двухпараметрического семейства гамма-распределений. Последнее семейство распределений свободно от указанного допущения [37, 86, 87, 108], вследствие чего его определенные модификации представляются эффективным средством статистического описания процесса дробления. В настоящем рассмотрении предлагается следующая эвристическая аппроксимация функции дробления:

$$\gamma_m(m, m') = C_m(\vec{F}) \frac{m'}{m^2} \exp\left[-\eta_m(\vec{F}) \frac{m'}{m}\right],$$

где $C_m(\vec{F})$ – функция, которая должна удовлетворять определенным условиям; $\eta_m(\vec{F}) > 0$ – безразмерная величина, описывающая интенсивность воздействия наложенного на систему внешнего поля $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots)$ и ряд дополнительных обстоятельств, сопровождающих акт дробления. Размерность $\gamma_m(m, m')$ обратная размерности времени. Поэтому в знаменателе второго сомножителя присутствует квадрат массы. Согласно выражению для вероятности $\gamma_m(m, m')$ характерные свойства процесса дробления состоят в следующем:

1) наиболее вероятный распад каждой льдины приходится на значение массы $m'_* = \frac{m}{\eta_m(\vec{F})}$, т. е. для каждой массы m имеется наиболее вероятный результат ее распада;

2) значение наибольшей вероятности распада исходной льдины $\gamma_m(m, m'_*) = \frac{C_m(\vec{F}) \exp(-1)}{m \eta_m(\vec{F})}$ является убывающей функцией ее массы m ;

3) при $m' < m'_*$ вероятность $\gamma_m(m, m')$ – убывающая функция m , т. е. маловероятна ситуация, когда результатом распада крупной льдины являются ее мелкие отдельные части;

4) поскольку m'_* не должна превосходить m , то при выполнении условия $\eta_m > 1$ происходит дробление льдин произвольных масс.

Таким образом, при постоянном значении $\eta_m(\bar{F})$ сечение по m поверхности $z = \gamma_m(m, m')$ представляет собой верхнюю часть полуволны, амплитуда которой с ростом m монотонно убывает. Для $m' = M^*$ она принимает минимальное значение.

После подстановки $\gamma_m(m, m')$ в выражение для вероятности $P_m(m)$ получим

$$P_m(m) = \frac{C_m(\bar{F})}{\eta_m^3} \left[(2 + 2\eta_m \frac{m_1}{m} + \eta_m^2 \frac{m_1^2}{m^2}) \exp(-\eta_m \frac{m_1}{m}) - (2 + 2\eta_m + \eta_m^2) \exp(-\eta_m) \right],$$

где m_1 – масса первичной льдины. При выводе данного соотношения для функции $C_m(\bar{F})$ отсутствуют какие-либо дополнительные ограничения, поэтому можно принять $C_m = P_m^{(0)} \eta_m^3$ и

$$P_m(m) = P_m^{(0)} \left[(2 + 2\eta_m \frac{m_1}{m} + \eta_m^2 \frac{m_1^2}{m^2}) \exp(-\eta_m \frac{m_1}{m}) - (2 + 2\eta_m + \eta_m^2) \exp(-\eta_m) \right],$$

где $P_m^{(0)}$ – неотрицательный эмпирический коэффициент. Анализ выражения $P_m(m)$ показывает следующее. Во-первых, как и должно быть, $P_m(m)$ всегда больше нуля (она равна нулю для льдин первичной массы, что соответствует отсутствию их дробления). Действительно, $P_m(m) = P_m^{(0)} [\varphi(\eta_m \frac{m_1}{m}) - \varphi(\eta_m)]$, где $\varphi(x) = (2 + 2x + x^2) \exp(-x)$. Так как φ является положительной монотонно убывающей функцией и $\eta_m \frac{m_1}{m} < \eta_m$, то и разность $\varphi(\eta_m \frac{m_1}{m}) - \varphi(\eta_m) > 0$. Следовательно, функция $P_m(m)$ неотрицательная. Во-вторых, $\frac{\partial P_m}{\partial m} > 0$ и $\frac{\partial P_m}{\partial \eta_m} > 0$.

Предметная интерпретация первого неравенства состоит в том, что вероятность распада льдины при росте ее массы возрастает. Поскольку η_m отражает интенсивность воздействия внешнего поля, то интерпретация второго неравенства заключается в росте вероятности распада льдины при увеличении внешнего воздействия. Выражение для $P_m(n)$ должно удовлетворять предъявляемым к вероятности требованиям: 1) оно должно быть неотрицательным; 2) быть меньше или равным 1. Первое из них выполняется автоматически. Выполнение второго требования заведомо выполняется при $P_m^{(0)} \leq [2 - (2 + 2\eta_{m,\max} + \eta_{m,\max}^2) \exp(-\eta_{m,\max})]^{-1}$, где $\eta_{m,\max} = \eta_m(T_{\max})$.

В рассматриваемых здесь случаях внешнее поле определяется температурой атмосферы. Поэтому представляется естественным выбрать параметризованную форму выражения для $\eta_m(\bar{F}) \equiv \eta_m(T)$ в виде

$$\eta_m(T) = \eta_m^{(0)} + \eta_m^{(T)}(T - T^*)\Theta(T - T^*),$$

где $\eta_m^{(0)}, \eta_m^{(T)}$ – неотрицательные коэффициенты; T^* – температура атмосферы, при которой начинается термическое разрушение покрова; $\Theta(z)$ – ступенчатая функция Хевисайда, равная нулю при $z \leq 0$ и единице при $z > 0$. При этом нижний предел η_m ограничен 1 или $\eta_m^{(0)} \geq 1$. Допустимость подобного представления обусловлена тем обстоятельством, что интенсивное дробление покрова приходится на этап весеннего таяния покрова. Поэтому при возрастании $\eta_m(T)$ наиболее вероятное значение результата распада $m'_* = \frac{m}{\eta_m(T)}$ смещается влево.

Другими словами, чем выше температура атмосферы, тем вероятнее образование мелких льдин из исходной льдины-источника. На этапах его формирования и становления, когда в выражении для функции $\eta_m(T)$ отсутствует второе слагаемое, самопроизвольное дробление льда имеет характер разрушения, которое обусловлено наличием в толще льда градиента напряженности (например, усталостное разрушение льда).

При дроблении масс льда в прибрежных районах следует учитывать особенности распада припая. В рамках принятой здесь концепции представления ледяного покрова посредством статистического ансамбля взаимодействующих между собой отдельных льдин припая с текущей массой $M^{(B)}$ соответствует одной льдине. Если $b_m(T) = [b_m^{(0)} + b_m^{(T)}(T - T_B^*)]\Theta(T - T_B^*)$ – интенсивность распада единицы его массы, то $b_m M^{(B)}$ характеризует соответствующие потери массы припая. При записи этого соотношения полагается, что взлом и дальнейший распад припая обусловлены главным образом воздействием на него поля температуры. В результате такого распада в открытую часть акватории прибрежного района поступает одна льдина соответствующей массы. Для удобства объединим перечисленные выше соотношения в определенную последовательность с одной общей ссылкой:

$$\begin{aligned} R_m(n) &= \int_m^{M^*} n(m') \gamma_m(m', m) dm' - n(m) P_m(n) + \delta_{c,1} \\ \gamma_m(m, m') &= \frac{m'}{m^2} \cdot P_m^{(0)} \eta_m^3(T) \exp[-\eta_m(T) \frac{m'}{m}] \\ P_m(m) &= P_m^{(0)} [\varphi(\eta_m \frac{m_1}{m}) - \varphi(\eta_m)] \\ \eta_m(T) &= \eta_m^{(0)} + \eta_m^{(T)}(T - T^*)\Theta(T - T^*) \\ b_m(T) &= [b_m^{(0)} + b_m^{(T)}(T - T_B^*)] I_{x,y} \Theta(T - T_B^*) \\ c &= b_m M^{(B)} / m \\ \varphi(x) &= (2 + 2x + x^2) \exp(-x) \end{aligned} \quad . \quad (3.15)$$

Вторые множители в выражениях для вероятностей $\gamma_m(m, m')$ и $P_m(m)$ нелинейным образом зависят от внешних факторов, что является проявлением нелинейности механизма их воздействия на процесс дробления. Действительно, при усилении воздействия на систему в ней сначала происходят определенные качественные изменения – в толще льда образуются микро- и макротрещины. И только потом непосредственно следует процесс дробления.

Рассмотренная цепочка рассуждений может быть использована для описания дробления площадей покрова с различными толщинами. Прежде всего, заметим, что модели дробления в терминах масс и в терминах площади–толщины отличаются между собой. В первом случае рассматривается дробление льдин одних и тех же масс, которые могут иметь различные толщины. При таком подходе происходит их «обезличивание», и поэтому дробление льдин одинаковых масс и различных толщин следует одному сценарию. Соответственно, очевидно «преимущество» иного подхода, где рассматривается дробление льдин одинаковых площадей и различных толщин. В этом случае $\frac{m'}{m} = \frac{a'}{a}$. Кроме того, в до-

полнение к предыдущим допущениям (наличие в системе случайной перемешивающей силы, статистической независимости процессов агрегации и дробления) следует добавить: акт дробления происходит настолько быстро, что изменением толщины можно пренебречь. Тогда при их выполнении модификации уравнений (3.15) для фиксированной толщины h принимают вид

$$\begin{aligned}
 R_{ah}(n) &= \int_a^{A^*} n_{ah}(a') \gamma_{ah}(a', a) da' - n_{ah}(a) P_{ah}(a) + \delta_{c,1} \\
 \gamma_{ah}(a, a') &= \frac{a'}{a^2} \cdot P_{ah}^{(0)} \eta_{ah}^3(T, h) \exp \left[-\eta_{ah}(T, h) \frac{a'}{a} \right] \\
 P_{ah}(a) &= P_{ah}^{(0)} \left[\varphi \left(\eta_{ah} \frac{a_1}{a} \right) - \varphi(\eta_{ah}) \right] \\
 \eta_{ah}(T, h) &= \eta_{ah}^{(0)} + \eta_{ah}^{(T)} (T - T^*) \Theta(T - T^*) - \eta_{ah}^{(h)} \frac{h}{H^*} \quad . \quad (3.16) \\
 b_{ah}(T, h) &= [b_{ah}^{(0)} + b_{ah}^{(T)} (T - T_B^*) - b_{ah}^{(h)} \frac{h}{H^*}] I_{x,y} \Theta(T - T_B^*) \\
 c &= b_{ah} A_h^{(B)} / a \\
 \varphi(x) &= (2 + 2x + x^2) \exp(-x)
 \end{aligned}$$

Отличие (3.15) от (3.16) заключается в том, что в последних соотношениях кроме воздействия наложенного на систему внешнего поля необходимо учитывать толщины льда. Интенсивность дробления тонкого льда существенно выше интенсивности дробления толстого льда, т. е. $\frac{\partial \eta_{ah}}{\partial h} < 0$, и поэтому $\eta_{ah}^{(h)} > 0$. При-

сутствие наибольшей за много лет толщины покрова H^* обусловлено потребностью построения такой модели, которая в меньшей степени зависит от масштаба измерения толщины покрова.

В выражении для функции $b_{ah}(T, h)$ параметр $b_{ah}^{(0)}$ характеризует не учтенные в исходных наблюдениях особенности дробления припая. Например, влияние солнечной радиации. Однако дальнейшие вычислительные эксперименты (см. гл. 4) показывают, что он полностью определяется параметром $b_{ah}^{(T)}$: значение выборочного коэффициента корреляции между ними равно 0,913. Данный факт означает, что при изменении $b_{ah}^{(T)}$ происходит соответствующее изменение $b_{ah}^{(0)}$, а это свидетельствует о параметрической вырожденности модели. Поэтому в дальнейшем свободный член для функции $b_{ah}(t, h)$ опускается из рассмотрения.

Отмеченные выше свойства функций вероятностей дробления $P_m(n)$ и $P_{ah}(a)$ соответствуют наблюдаемым в реальных условиях особенностям протекания процесса распада льдин, что свидетельствует о приемлемости использования предлагаемого подхода. Согласно ему чем больше размер льдины, тем более вероятно ее дробление. Льдины же малых размеров дробятся меньше. Достоверность этого факта обусловлена следующим. При дроблении лед разрушается в первую очередь в местах распределенных некоторым образом в его толще прочностных дефектов (макро- и микротрещин). Поскольку их число пропорционально массе вещества, то по мере измельчения размеров прочность оставшихся частей возрастает.

3.2.3. Эволюция масс и площадей ледяного покрова в открытом море

Для массивов льда характерна существенная инерция его общего дрейфа, для которого отклонения скоростей от их средних значений за сутки не учитываются. Вследствие этого для суточного временного шага модели ($\Delta t = 1$ сутки) принимается квазистационарная модель скорости дрейфа. Полагается также, что отдельные льдины дрейфуют с одной и той же средней скоростью. Достоверность этого допущения повышается с увеличением сплоченности: если сплоченность велика, то увеличивается частота столкновений отдельных льдин и их средняя скорость становится одинаковой. При расчете средней скорости следует учитывать касательные напряжения ветра $\bar{\tau}_a$ (1.4) и течения $\bar{\tau}_w$ (1.5), аналог гидростатического давления P (1.7) и силу Кориолиса (1.6), при расчете которой учитывалось изменение ее значений с широтой (β -эффект). Варьирование значениями параметров в (1.7) показывает (см. разд. 4.2), что в смысле определенного критерия (минимума функционала отклонений наблюдаемых величин и

результатов математического моделирования) наиболее приемлемыми являются: $P_0 = 5 \cdot 10^7 \text{ э} / \text{с}^2$, $S_0 = 0,7$ и $\kappa = 3$.

На границах расчетной области задаются два вида условий:

- на границе с берегом при нажимном дрейфе $P > 0$ и $\vec{u}_n = 0$, (3.17а)

- на границе лед–вода (Г) $\left. \frac{\partial \vec{u}_n}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0$ (3.17б)

где \vec{n} – внутренняя нормаль к границе. На твердой границе для выполнения (3.17а) требуется введение фиктивных ячеек за стенкой, в которой задается давление, равное давлению в ячейках непосредственно перед стенкой, а нормальная компонента скорости берется с обратным знаком (симметричное отражение) [29]. Согласно (3.17б) скорость дрейфа вблизи области расчета изменяется так же, как и внутри нее [49, 50].

Эволюция плотности распределения льдин по их массам в открытом море определяется уравнением

$$\frac{\partial n_m}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha n_m}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \dot{m} n_m}{\partial m} = S_m + R_m, \quad (3.18)$$

где в левой части выполняется суммирование по повторяющимся индексам; \dot{m} –

термическая эволюция масс льда (3.12); $M = \int_{m_1}^{M^*} m n dm + M^{(B)} I_{x,y}$ – общая масса

льда на акватории района; $M^{(B)}$ – масса припая (она отлична от нуля только в прибрежных районах); S_m и R_m определяются из соотношений (3.6) и (3.15) соответственно. Поскольку интенсивность формирования покрова существенно ниже интенсивности его весеннего таяния, то для этого этапа в (3.7) следует выполнить соответствующую замену параметра α_m на параметр α'_m .

При задании граничных условий следует принципиально разделять процессы формирования и таяния покрова. Так, в первом случае первичные льдины образуются из доступной для них воды, что задается условием (3.8). Во втором случае из системы выбывают первичные льдины, поток которых естественно пропорционален массе первичных льдин. Поэтому для последнего случая

$$\dot{m} n_m \Big|_{m=m_1} = \alpha'_{mn} (T^* - T) m_1 n_m(m_1).$$

Согласно этим условиям интенсивность выбывания льдин из крайних градаций их масс определяется наложенным на систему температурным полем и плотностью распределения числа первичных льдин. Таким образом, общая форма записи динамики массы отдельной льдины и граничных условий принимает удобный для численных расчетов вид

$$\begin{aligned}
\dot{m}n_m \Big|_{m=m_1} &= \psi_m(T, T^*) \\
\dot{m}n_m \Big|_{m=M^*} &= 0 \\
\psi_m(T, T^*) &= \hat{\alpha}_{mn}(T, T^*)[(M^* - M)\Theta_1 + n_m(m_1)\Theta_2] \\
\dot{m} &= \alpha_m(T, T^*)(M^* - M)m \\
\hat{\alpha}_{mn}(T, T^*) &= (T^* - T)(\alpha_{mn}\Theta_1 + \alpha'_{mn}\Theta_2)m_1 \\
\hat{\alpha}_m(T, T^*) &= (T^* - T)(\alpha_m\Theta_1 + \alpha'_m\Theta_2) \\
\Theta_1 &= \Theta(T^* - T), \Theta_2 = 1 - \Theta_1, M = \int_{m_1}^{M^*} mndm + M^{(B)}I_{x,y}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Задача Коши (3.18)–(3.19) решается при нулевых начальных условиях.

В практике изучения ледяного покрова встречаются ситуации, когда интерес представляет оперативный расчет пространственно-временного изменения только полной массы льда. Для полного цикла эволюции покрова вывод соответствующего уравнения основывается на умножении (3.18) на m и последующем интегрировании по всему диапазону изменения масс. В результате получим

$$\frac{\partial M^{(S)}}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha M^{(S)}}{\partial x_\alpha} = \hat{\alpha}_m(T, T^*)(M^* - M)M^{(S)} + \psi_m(T, T^*) + b_m(T)M^{(B)}.$$

На этапе формирования и зрелого состояния покрова его решение в точности совпадает с пространственно-временным изменением полной массы льда. В рассматриваемом случае общая масса льда выступает как единый объект, и поэтому не допускается ее разделение на отдельные составляющие. Следствием сказанного является то обстоятельство, что при использовании этого уравнения в период таяния покрова не определено значение плотности распределения льдин по их массам, в частности на массу первичных льдин. В связи с этим имеет место проблема нахождения массы первичных льдин на основании полной массы льда. Понятно, что в рамках рассматриваемого подхода указанная проблема не имеет решения. Поэтому при использовании данного уравнения для расчета полной массы льда на весь период ее эволюции следует пренебречь теми ее потерями, которые происходят в результате выбывания первичных льдин как целостного объекта рассмотрения. В связи с последними обстоятельствами уравнение эволюции для приближения $M^{(S)}$ принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{M}^{(S)}}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha \tilde{M}^{(S)}}{\partial x_\alpha} &= \\
&= [\hat{\alpha}_m(T, T^*)\tilde{M}^{(S)} + \hat{\alpha}_{mn}(T, T^*)\Theta_1](M^* - \tilde{M}^{(S)} - M^{(B)}) + b_m(T)M^{(B)}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

При таком подходе вся «ответственность» за выбывание масс первичных льдин «возлагается» на первый член (3.20). Поскольку роль тонкого льда существенна в начальный и конечный этапы эволюции покрова, то рамки его применимости не охватывают период окончательного его разрушения. Данная ситуация является приемлемой для ряда практических задач.

Эволюция совместной плотности распределения площадей и толщин льда в открытом море определяется уравнением

$$\frac{\partial n_{ah}}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha n_{ah}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \dot{a} n_{ah}}{\partial a} + \frac{\partial \dot{h} n_{ah}}{\partial h} = D_{ah} \frac{\partial^2 n_{ah}}{\partial h^2} + S_{ah} + R_{ah},$$

где \dot{a} – термическая эволюция площади отдельной льдины (3.11); \dot{h} – термическая эволюция толщины (3.1); S_{ah} определяется из (3.10), а R_{ah} – первым соотношением (3.15). В соотношениях (3.1) и (3.11) для этапа весеннего таяния покрова следует выполнить замену соответствующих коэффициентов. Поэтому общая форма записи принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \hat{\alpha}_a(T, T^*)(A^* - A)a \\ \dot{h} &= \hat{\alpha}_h(T, T^*)(H^* - h)h \\ \hat{\alpha}_a(T, T^*) &= (T^* - T)(\alpha_a \Theta_1 + \alpha'_a \Theta_2), \\ \hat{\alpha}_h(T, T^*) &= (T^* - T)(\alpha_h \Theta_1 + \alpha'_h \Theta_2) \\ A &= \int_{h_1}^{H^*} \left(\int_{a_1}^{A^*} a n_{ah} da + A_h^{(B)} I_{x,y} \right) dh \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $A_h^{(B)}$ – площадь припая толщиной h .

На этапе формирования покрова и его зрелого состояния граничные условия для модели совместного распределения площадей и толщин льда определяются (3.12). В процессе таяния покрова определенная часть льдин первичной градации выбывает из системы. Поэтому для нее должно выполняться соотношение, подобное первому граничному условию (3.19). Общая форма записи граничных условий принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{a} n_{ah} \Big|_{a=a_1, h=h_1} &= \psi_h(T, T^*) \\ \dot{h} n_{ah} \Big|_{a=a_1, h=h_1} &= \dot{h} n_{ah} \Big|_{a=a_1, h \neq h_1} = \dot{h} n_{ah} \Big|_{a \neq a_1, h=h_1} = 0 \\ \dot{a} n_{ah} \Big|_{a=a_1, h \neq h_1} &= \dot{a} n_{ah} \Big|_{a \neq a_1, h=h_1} = 0 \\ \dot{a} n_{ah} \Big|_{a=A^*} &= \dot{h} n_{ah} \Big|_{h=H^*} = 0 \\ \psi_h(T, T^*) &= \hat{\alpha}_{ah}(T, T^*) [a_1 (A^* - A) \Theta_1 + A_h(h_1) \Theta_2] \\ \hat{\alpha}_{ah}(T, T^*) &= (T^* - T)(\alpha_{ah} \Theta_1 + \alpha'_{ah} \Theta_2) \end{aligned} \quad (3.21a)$$

Эволюция площадей льда A_h определяется уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_h}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha A_h}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \dot{h} A_h}{\partial h} = D_{ah} \frac{\partial^2 A_h}{\partial h^2} + \hat{\alpha}_a(T, T^*)(A^* - A)A_h + \\ + \psi_h(T, T^*)\delta_{h,h_1} + b_{ah}(T, h)A_h^{(B)}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $A_h^{(B)}$ – площадь припая толщины h ; $A = \int_{h_1}^{H^*} (A_h + A_h^{(B)} I_{x,y}) dh$ – общая площадь льда на акватории. Граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{h} A_h \big|_{h=h_1} = 0 \\ \dot{h} A_h \big|_{h=H^*} = 0 \end{aligned}$$

Если теперь выполнить интегрирование (3.22) по всему диапазону изменения толщин, то в результате получим уравнение динамики общей площади льда в открытом море $A^{(S)}$:

$$\frac{\partial A^{(S)}}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha A^{(S)}}{\partial x_\alpha} = \hat{\alpha}_a(T, T^*)(A^* - A^{(S)} - A^{(B)})A^{(S)} + \psi_h(T, T^*) + \int_{h_1}^{H^*} b_{ah}(T, h)A_h^{(B)} dh,$$

где $A^{(B)}$ – общая площадь припая (для районов открытого моря она равна нулю). Третий член в правой части после подстановки в него выражения для функции $b_{ah}(T, h)$ из (3.16) равен $b_{ah}(T, \bar{h}^{(B)})A^{(B)}$, где $\bar{h}^{(B)} = \int_{h_1}^{H^*} h A_h^{(B)} dh / \int_{h_1}^{H^*} A_h^{(B)} dh$ – средняя толщина припая. Поэтому уравнение эволюции для приближения $A^{(S)}$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{A}^{(S)}}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha \tilde{A}^{(S)}}{\partial x_\alpha} = [\hat{\alpha}_a(T, T^*)\tilde{A}^{(S)} + \\ + \hat{\alpha}_{ah}(T, T^*)a_1\Theta_1](A^* - \tilde{A}^{(S)} - A^{(B)}) + b_{ah}(T, \bar{h}^{(B)})A^{(B)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Если для $A^{(S)}$ принимаются такие же, как для $M^{(S)}$, допущения, то это уравнение может использоваться для описания эволюции общей площади льда от начального срока ее формирования вплоть до начального момента периода его окончательного разрушения. Целесообразность практического использования (3.23) обусловлена еще и тем обстоятельством, что на его основе относительно просто выполняется параметрическая идентификация, или настройка модели эволюции распределения площадей льда по толщине (3.22). В этом случае оценивание искомых параметров выполняется на основании интегральных ха-

ра характеристик эволюции, что существенно упрощает вычислительную процедуру определения их приближенных значений. Для всех перечисленных моделей используются нулевые начальные условия.

Представленные выше соотношения приведены в удобном для численных расчетов виде. Необходимо заметить, что уравнения (3.18) и (3.22) представляют собой различные варианты математического описания одного и того же процесса – эволюции ледяного покрова. Здесь рассматриваются оба варианта, что обусловлено многообразием практических ситуаций их использования. В частности, критерием выбора варианта может служить объем статистической выборки, на основании которой выполняется параметрическая идентификация, или настройка параметров моделей для конкретного водоема. Понятно, что для реализации этой процедуры при использовании (3.20) требуется выборка существенно меньшего объема. Однако в этом случае модель термической эволюции льдины в меньшей степени отражает реальность: масса является совокупной характеристикой формы льдины, поэтому при рассмотрении ее термической динамики отсутствуют различия между ее горизонтальными и вертикальными размерами. Таким образом, основной причиной рассмотрения обоих вариантов является то обстоятельство, что за улучшение качества описания приходится «платить» возросшей сложностью.

3.3. ЭВОЛЮЦИЯ ПРИПАЯ ЯПОНСКОГО МОРЯ

Ледяной покров замерзающих морей разделяется на льды припая и льды открытого моря. Исходя из формального определения этих категорий морского льда, данное разделение рассматривается только с позиций наличия или отсутствия дрейфа льда. Однако процессы эволюции для указанных разновидностей морских льдов еще и определенным образом различаются, что обусловлено следующими их отличиями: глубин морского дна; температурного и солевого режимов подстилающих вод; процессов весеннего таяния и дробления льда. Действительно, воды прибрежных районов менее глубокие и менее соленые (на состав и их температурно-солевой режим вод существенным образом влияют стоки пресных рек, деятельность промышленных предприятий). Поэтому температура атмосферы T_B^* , при которой происходят первичное формирование и первичное таяние припая, превышает соответствующую величину для районов открытого моря.

Если рассмотрение выполняется в терминах масс льда, то, следуя ранее принятым допущениям, припай являет собой единую льдину определенной массы. Тогда полный цикл ее эволюции определяется уравнением (3.20):

$$\dot{M}^{(B)} = [\hat{\alpha}_m(T, T_B^*)M^{(B)} + \hat{\alpha}_{mn}(T, T_B^*)\Theta_1](M^* - M^{(S)} - M^{(B)}) - b_m(T)M^{(B)},$$

где T_B^* – температура воздуха в первичный момент формирования припая (она совпадает с температурой воздуха в начальный момент взлома припая – см. разд. 2.6); $M^{(S)}$ – масса льда в открытой части акватории этого прибрежного района; $b_m(T)$ из (3.15) характеризует интенсивность весеннего таяния и распада припая. В начальный момент масса припая нулевая. В этом случае решение задачи Коши на период от начала формирования покрова до момента начального разрушения определяется кривой (3.9): после начального момента времени следует незначительный рост массы, а после прохождения точки перегиба этой кривой – быстрый рост с выходом на предельное значение M^* . На заключительной весенней стадии эволюции имеют место таяние и распад припая, в результате которого его обломки выбывают из категории припая и переходят в категорию льдов открытого моря. Наличие двух составляющих процесса весеннего разрушения припая обуславливает тот факт, что интенсивность разрушения припая существенно выше интенсивности его формирования.

Если рассмотрение эволюции ледяного покрова выполняется в терминах «площадь–толщина», то припай может быть представлен как совокупность площадей различных толщин $A_h^{(B)}$. Тогда полный цикл их эволюции соответствует модели, которая задается уравнением (3.22):

$$\frac{\partial A_h^{(B)}}{\partial t} + \frac{\partial \dot{A}_h^{(B)}}{\partial h} = D_{ah} \frac{\partial^2 A_h^{(B)}}{\partial h^2} + \hat{\alpha}_a(T, T_B^*)(A^* - A)A_h^{(B)} + \psi_h(T, T_B^*)\delta_{h,h1} - b_{ah}(T, h)A_h^{(B)} \quad (3.24)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \dot{A}_h \big|_{h=h_1} &= 0 \\ \dot{A}_h \big|_{h=H^*} &= 0 \end{aligned}$$

где соответствующие функции определяются (3.21а). Согласно этому уравнению на начальном этапе при понижении температуры следуют быстрый рост площади тонкого льда и более медленный рост толщины припая. После перехода кривой средней толщины припая своей точки перегиба имеет место интенсивный последовательный переход площадей различных толщин из их младших градаций толщин в старшие градации. На этапе зрелого состояния, когда исчерпаны доступные для площади и толщины ресурсы льда, значение средней толщины выходит на ее предельное для данного прибрежного района значение. Полный цикл эволюции распределения площадей припая по его толщинам представлен на рис. 3.1, А–В. Здесь по оси абсцисс – текущий день года с момента начала эволюции льда на акватории моря, а по оси ординат – значение соответствующей площади в масштабе площади района открытого моря.

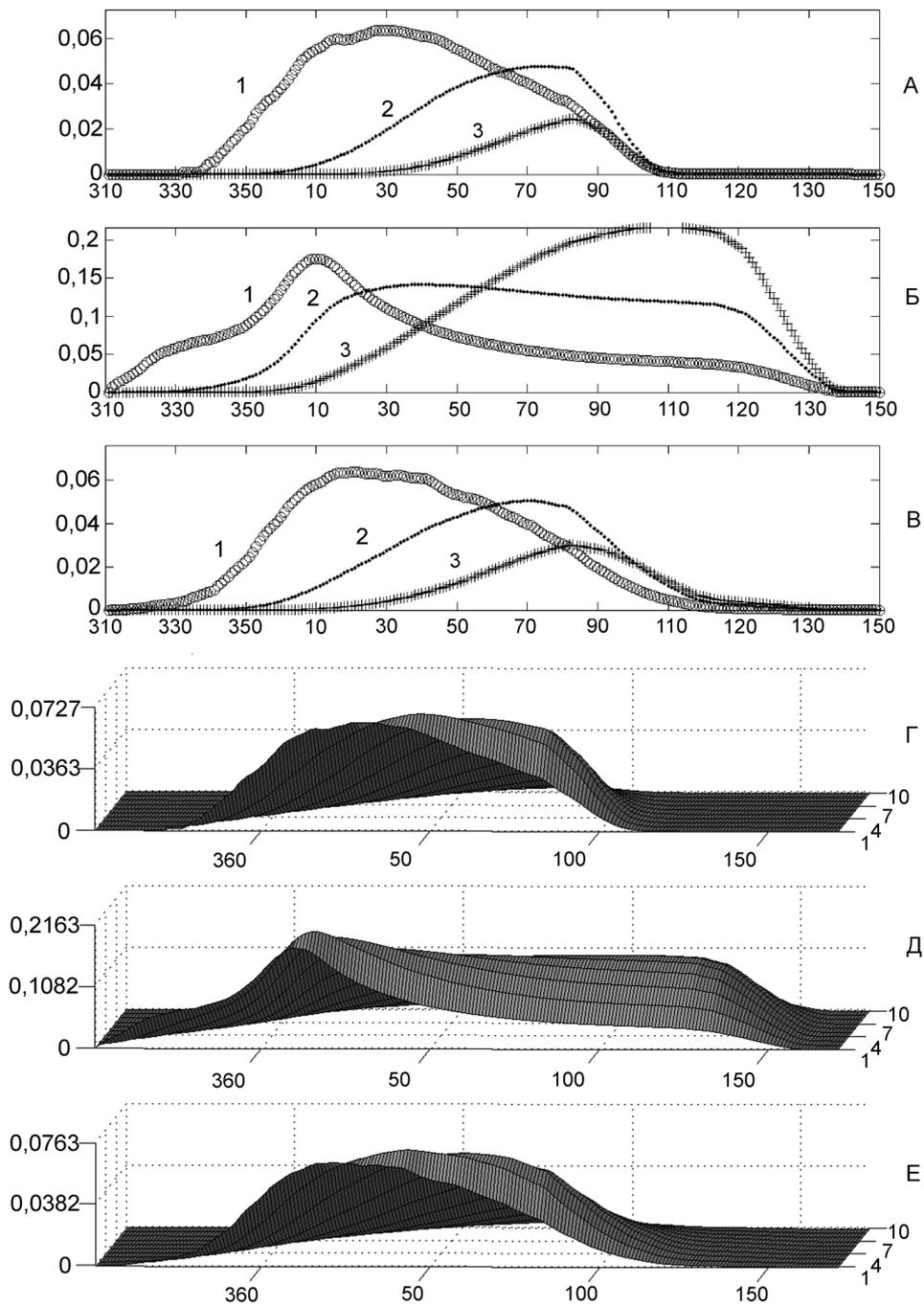


Рис. 3.1. Распределения площадей льда припая $A_h^{(B)}$ в 8-м (залив Петра Великого – А, Г) и 114-м (Татарский пролив – Б, Д) районах, средняя картина распределений льда (В, Е). А–В: 1 – тонкий лед, 2 – средний лед, 3 – толстый лед. Г–Е: 1, 4, 7, 10 – площади градаций толщин льда

Здесь и везде в дальнейшем ось времени упорядочена в соответствии со временем начала эволюции покрова на акватории Японского моря (в соответствии с условиями проведения наблюдений – 310-й день текущего года). Выбор районов обусловлен их крайними положениями на акватории моря. Усредненное по всем районам распределение строилось с учетом значений площадей в отдельных районах моря.

Полученные результаты отвечают качественным представлениям о характере эволюции площадей припая. В начальный период эволюции над остальными доминируют площади тонких льдов. В этот период площади остальных градаций толщин находятся в их «зачаточном» состоянии. После прохождения средней площади припая своей максимальной точки площади льдов первых градаций толщин падают, а площади последних градаций растут. Интересно отметить, что картина таяния и распада припая не симметрична картине его формирования: старшие градации толщин переходят в младшие, а площадь тонкого льда в результате таяния и воздействия коротковолновой радиации выбывает из системы. Данное обстоятельство подтверждается рис. 2.9, где в последней весенней декаде проведения съемок (случаи Е и И) отмечается присутствие низких значений площадей льда повышенных толщин, как для припая, так и для льда открытого моря. Анализ отдельных случаев показывает, что категории льдов различных градаций в отдельных районах согласованно делят их общий пространственный ресурс: весь период полного цикла эволюции покрова разделяется на отдельные промежутки, на каждом из которых доминирует категория льда только одной из градаций.

Согласно рассматриваемому подходу интенсивность перехода льда из одной градации в другую «регулируется» температурой атмосферы. Указанная особенность свойственна эволюции покрова каждого из районов. Она также присутствует и на усредненной картине. Причиной подобной ситуации является тот факт, что эволюция покрова во всех районах Японского моря следует одному и тому же сценарию.

Трехмерная картина эволюции площадей $A_h^{(B)} = A^{(B)}(t, h)$ представлена на рис. 3.1, Г–Е. Наличие локальных неровностей на поверхностях обусловлено переходом площадей из одних градаций в другие. В период весеннего таяния припая площади его более высоких градаций переходят в низкие градации, а площадь тонкого льда замещается морской водой. Таяние также сопровождается разломом льда и выносом его фрагментов в открытое море. Аналогичная ситуация присутствует и в Татарском проливе (114-й район). Но здесь указанные процессы имеют более контрастный характер.

Отсутствие симметрии в распределениях отдельных толщин и есть одно из отличий процессов формирования покрова и его разрушения. В частности, распределение площади тонкого льда унимодальное, т. е. имеет единственный максимум. Для остальных градаций льда имеет место аналогичная ситуация. При этом продолжительность периода формирования покрова выше продолжительности его разрушения.

3.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ЛЬДА ПО ТОЛЩИНЕ НА АКВАТОРИИ ЯПОНСКОГО МОРЯ

Рассмотрение распределения площадей покрова по его толщинам в большей степени способствует детальному исследованию его общей эволюции, поскольку масса отдельной льдины неоднозначно определяет ее геометрическую форму. А в действительности геометрия формы льдин отражает определенную ступень ее эволюции: тонкие льдины большой протяженности соответствуют раннему этапу эволюции, а малой протяженности при повышенных толщинах, – как правило, позднему этапу (см. разд. 2.3.2). Кроме того, распределение масс льда может быть получено на основании распределения площадей льда по его толщинам. Понятно, что обратное не соответствует действительности. Тем не менее модель эволюции масс льда оказывается полезной для изучения отдельных составляющих процессов эволюции льда, в частности процессов формирования крупных образований отдельных льдин. Часть из этих вопросов решается на стадии параметрической идентификации модели, когда можно оценить основные составляющие статистического механизма агрегации отдельных льдин.

Пространственно-временная динамика распределения площадей льда по его толщинам в отдельных районах определяется уравнением (3.22) при соответствующих граничных условиях. Полный цикл эволюции площадей льда в открытом море представлен на рис. 3.2, а эволюция суммарного распределения льдов припая и льдов открытого моря – на рис. 3.3. Здесь выбор районов такой же, как и в предыдущем случае. Для детального выявления особенностей распределений они приводятся в тех масштабах, которые имеют место для каждого отдельного случая. Так, максимумы на рис. 3.1–3.3 не совпадают между собой.

В отличие от ранее рассмотренных случаев (рис. 3.1) здесь последствия переходов одних градаций льда в другие проявляются более заметным образом. В рамках используемых предпосылок это связано с различием значений T_B^* и T^* . Характер распределения площадей подобен распределению площадей припая. Значимые отличия между ними отмечаются только для определенного периода таяния льда весной, когда при распаде припая его обломки выносятся в открытое море и последовательно переходят в категории льда открытого моря. В этот период площади различных градаций последних льдов растут, а площади припая соответствующим образом падают. На рис. 3.2 данная ситуация отображается в форме локальных максимумов на поверхностях распределений. Необходимо отметить его отсутствие для усредненного по всем прибрежным районам случая на рис. 3.2, Е, что обусловлено несовпадением периодов присутствия льда в различных районах акватории моря. Поскольку при распаде имеет место активное таяние льда, то суммарная площадь льдов падает даже при наличии локального максимума на поверхности распределения (рис. 3.3). Усредненная за отдельные сезоны эволюция площадей льда представлена на рис. 3.4, где временные диапазоны каждого сезона определяются результатами разд. 2.3.1.

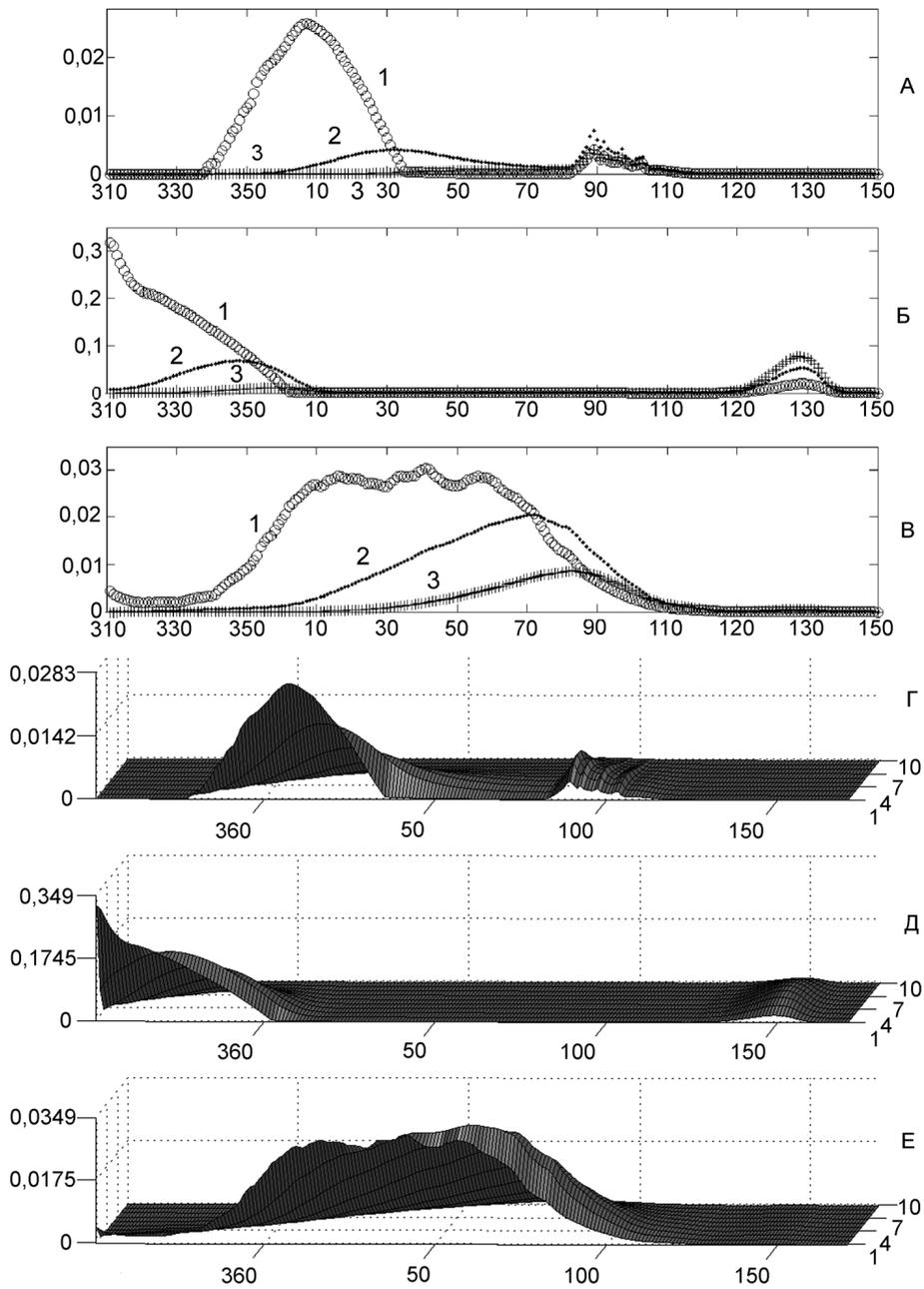


Рис. 3.2. Распределения площадей льда открытого моря A_i для отдельных толщин в 8-м (залив Петра Великого – А, Г) и 114-м (Татарский пролив – Б, Д) районах, средняя картина распределений (В, Е). А–В: 1 – тонкий лед, 2 – средний лед, 3 – толстый лед. Г–Е: 1, 4, 7, 10 – площади градаций толщин льда

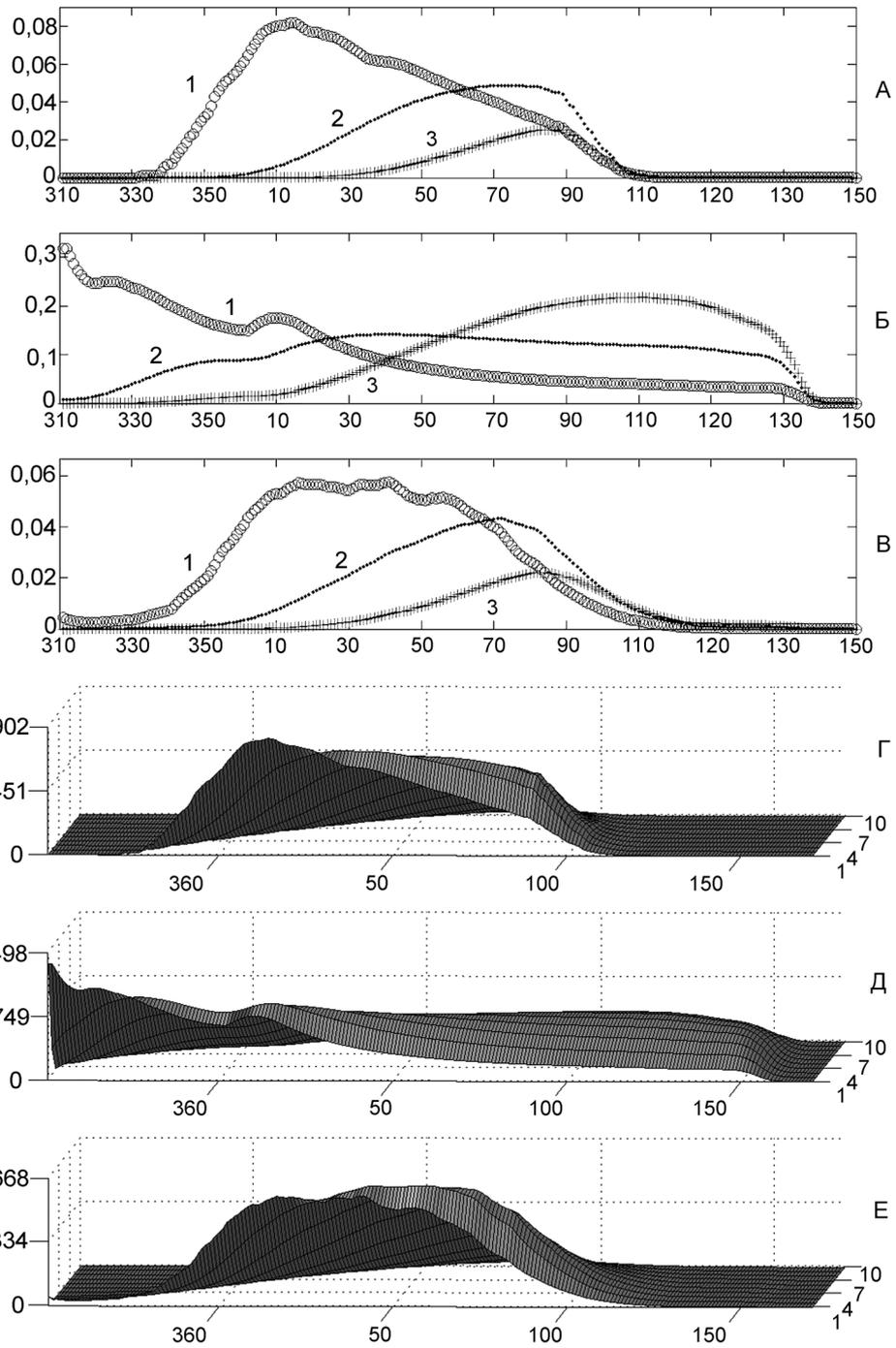


Рис. 3.3. Совокупные распределения льда припая и открытого моря для 8-го района (А, Г), района Татарского пролива (Б, Д) и среднее распределение льда в открытом море (В, Е). А–В: 1 – тонкий лед, 2 – средний лед, 3 – толстый лед. Г–Е: 1, 4, 7, 10 – площади градаций толщин льда

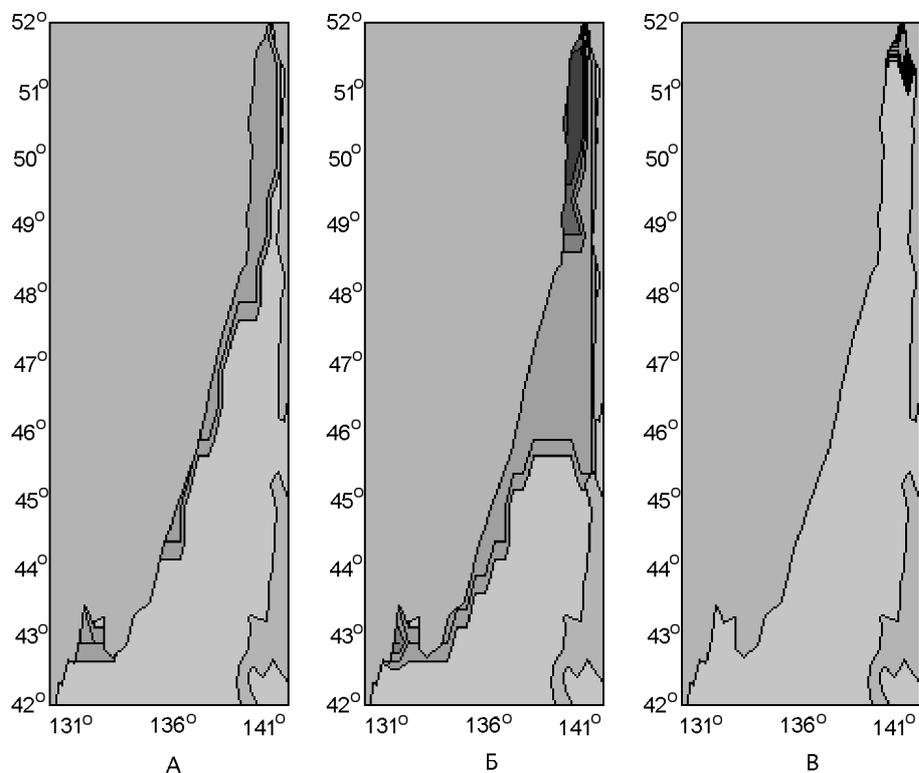


Рис. 3.4. Сезонная эволюция ледяного покрова Японского моря (А – осень, Б – зима, В – весна)

Случаи А, Б и В рис. 3.4 указывают на сезонный характер эволюции покрова: от осеннего формирования на севере моря и последующего его становления на акватории до весеннего термического и механического разрушения.

ВЫВОДЫ

Выполненные в главе аналитические исследования, основанные на результатах анализа данных декадных состояний ледяного покрова Японского моря за многолетний период наблюдений, показывают следующее.

1. Предлагаемая модель эволюции толщины покрова основывается на положениях, согласно которым относительное изменение толщины за единицу времени определяется температурой надледного слоя воздуха и доступным для толщины ресурсом льда. Если следовать этим положениям, между толщиной и температурой атмосферы имеет место временное запаздывание. Выявлены условия, при которых временное изменение толщины на начальном этапе формирования покрова происходит различными способами.

2. На основе кинетического уравнения Смолуховского получены уравнения эволюции распределения льдин по их массам и эволюции совместных распределений льдин по площадям и толщинам. Предлагаются локальные модели термической эволюции масс и площадей отдельных льдин.

3. Разработана эвристическая модель самопроизвольного дробления льдины на ее отдельные составляющие. На основе этой модели получено выражение для вероятности самопроизвольного дробления льдин различных градаций (масс, а также различных градаций площадей и толщин). Для этого процесса построено выражение для балансового соотношения между прибывающими и выбывающими из градации льдинами.

4. Разработана модель эволюции распределения площадей льда по толщинам. В этой модели учитываются переходы площадей из одних градаций толщин в другие, которые обусловлены воздействием внешнего поля температур. Кроме того, учитываются перераспределение площадей льда различных толщин и процессы самопроизвольного дробления.

5. Разработаны модели эволюции масс и площадей припая. Первая модель основана на представлении припая как одной льдины, эволюция которой определяется температурой атмосферы. При весеннем таянии припай распадается на отдельные составляющие согласно предлагаемой модели дробления. Если рассмотрение выполняется в терминах площадей и толщин льда, то припай формализуется посредством совокупности взаимодействующих между собой льдин различных толщин. При таянии припая также учитывается дробление площадей на отдельные составляющие, которые переходят в категорию льдов открытого моря.

6. Результаты численного моделирования эволюции покрова показывают выполнение принятых при разработке моделей допущений.

**ОЦЕНКА АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ
И ПРОГНОЗ СОСТОЯНИЯ ЛЕДЯНОГО
ПОКРОВА ЯПОНСКОГО МОРЯ**

Построение работоспособной математической модели представляет собой последовательное выполнение определенных этапов. Первый из них заключается в накоплении предметных сведений и реальных фактов протекания исследуемого явления. На втором этапе факты систематизируются, и далее в терминах определенного математического аппарата формулируется соответствующая математическая модель. На этом этапе также исследуются качественные свойства модели, выясняются рамки допустимости ее применения. Заключительный этап состоит в вычислении приблизительных значений параметров модели (оценки) и в исследовании их статистических свойств. Здесь же проверяется адекватность модели ее реальному прототипу. Если математическая модель с приемлемой для конкретной прикладной области степенью точности соответствует рассматриваемому процессу или явлению, то в дальнейшем она используется для изучения реакции системы на заданное внешнее воздействие, в том числе и для построения различных прогнозов.

Разделение общей задачи построения модели на отдельные этапы достаточно условно. Их последовательность выявляется при организации и выполнении вычислительных экспериментов, которые обычно носят итерационный многофакторный характер. Действительно, при их проведении исходные факты дополняются некоторыми неучтенными или новыми подробностями, что приводит к соответствующему уточнению основных положений математической модели. Соответствующим образом модифицируется вычислительный алгоритм, отрабатываются структура организации выполнения вычислительного процесса и форма представления результатов расчетов.

Вычисление параметров и проверка адекватности модели выполняются на основании поиска экстремумов целевой функции. Она является мерой неадекватности наблюдаемых и рассчитанных по модели значений динамических переменных задачи. При этом тип целевой функции непосредственно определяет метод оценки параметров. Для численной реализации поиска его экстремумов кроме известных методов (наибольшего правдоподобия, минимума χ^2 , наименьших квадратов) часто привлекаются многочисленные методы, основанные на интуиции и здравом смысле, а также практические навыки самого исследователя (готовые рецепты решения подобных задач, как правило, отсутствуют). Поскольку интуиция исследователя бывает весьма плодотворной при решении подобных задач, то использование эмпирических методов может привести к статистически состоятельным оценкам. Однако область их допустимых границ изменения или дисперсии либо вообще не указывается [20, 59, 32], либо приводится

их недостаточно обоснованный вывод. Аналогичная ситуация в первую очередь относится к оценкам дисперсии различного рода прогнозов. Отсутствие значений дисперсий параметров и меры их зависимости между собой (корреляций или ковариаций) в некоторой степени приводит к бессмысленности. При отсутствии значений дисперсий параметров невозможно ответить на вопросы о степени их вычислительной надежности и доверительных интервалов их изменения. Кроме того, наличие высокой значимой корреляции между параметрами может являться индикатором параметрической вырожденности модели. Результат подобного оценивания может быть полезен для нахождения экстремума целевой функции, но сведения о соотношении оцененных и истинных значений параметров в подобном случае вообще не рассматриваются. Поэтому представляется целесообразным привести подробные методики оценки параметров эволюции и построение прогнозов состояния ледяного покрова.

Тестирование методик и их практическое применение рассматриваются на примере оценки параметров для модели распределения площадей льда по его толщинам. Выбор именно этой модели обусловлен тем обстоятельством, что в рамках принятых допущений она детально характеризует эволюцию покрова. Кроме того, с ее помощью легко получить распределения масс льда, и в этом смысле она является универсальной.

4.1. СТРАТЕГИЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ

Центральным объектом теории оценивания параметров для математического представления рассматриваемого явления или процесса на основании статистической выборки является матрица моментов остатков [37]:

$$M(\theta) = \sum_{\mu=1}^n e_{\mu}^T(\theta) e_{\mu}(\theta),$$

где n – число проведенных экспериментов; $e_{\mu a} \equiv y_{\mu g} - f_g(x_{\mu}, \theta)$ – остатки, или разность между наблюдаемым в μ -м эксперименте значением g -го элемента вектора зависимых переменных ($g = \overline{1, m}$) и значением его соответствующего модельного образа; $x_{\mu} = \{x_{\mu c}\}_{c=\overline{1, l}}$ – независимые переменные модели; $\theta = \{\theta_{\alpha}\}_{\alpha=\overline{1, k}}$ – вектор оцениваемых параметров. В этих обозначениях общая запись целевой функции принимает вид

$$\Phi(\theta) = \Psi(M(\theta)),$$

где Ψ – заданная функция. В большинстве практических случаев при ее построении полагают, что остатки имеют нормальное распределение с одной и той же ковариационной матрицей. Принятие допущения о нормальности в реальных

ситуациях является типичным: если при большом объеме выборки наблюдаемое значение случайной переменной формируется в результате воздействий многих аддитивных и независимых факторов, то выполняются условия центральной предельной теоремы и распределение случайной величины принимается нормальным [70, 2].

Если для нахождения экстремумов функционала воспользоваться методом Гаусса, то тогда элементы градиента $q = \{q_\alpha\}_{\alpha=1, \bar{k}}$ и приближения матрицы Гессе $N = \{N_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1, \bar{k}}$ определяются матричными соотношениями [7]

$$q = -2 \sum_{\mu=1}^n B_\mu^T \Gamma e_\mu \quad \text{и} \quad N = 2 \sum_{\mu=1}^n B_\mu^T \Gamma B_\mu,$$

где

$$B_{\mu g, \alpha} \equiv -\frac{\partial e_{\mu g}}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial f_{\mu g}}{\partial \theta_\alpha} \quad \text{и} \quad \Gamma_{gb} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial M_{gb}}.$$

При независимом проведении экспериментов остатки удовлетворяют нормальному распределению, и поэтому логарифм функции правдоподобия принимает вид

$$\ln L(\theta, V) = -nk \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \det V - \frac{1}{2} \text{Tr}[V^{-1} M(\theta)],$$

где V – ковариационная матрица остатков, одинаковая для всех экспериментов. В представленном соотношении приняты естественные допущения о независимости ошибок в различных экспериментах и о том, что в каждом эксперименте они распределены с одной и той же ковариационной матрицей. При неизвестной ковариационной матрице остатков в условиях выполнения вышеуказанных допущений справедливы аппроксимации

$$V = \frac{1}{n} M(\theta), \quad \Gamma = \frac{n}{2} M^{-1}(\theta) \quad \text{и} \quad \Phi(\theta) = \frac{n}{2} \ln \det M(\theta).$$

Следовательно, максимизация логарифма функции правдоподобия соответствует минимизации последнего функционала. Для случая единственного уравнения наименьших квадратов $m = 1$

$$B_{\mu, \alpha} \equiv \frac{\partial f_\mu}{\partial \theta_\alpha}, \quad \Gamma \equiv 1, \quad N_{\alpha\beta} = 2 \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial f_\mu}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial f_\mu}{\partial \theta_\beta}, \quad V_\theta = 2\sigma^2 N^{-1},$$

где V_θ – оценка ковариационной матрицы параметров. При неизвестной дисперсии σ^2 она заменяется ее оценкой $e_\mu^T(\theta)e_\mu(\theta)/(n-k)$.

Применительно к рассматриваемой здесь эволюции ледяного покрова предметная интерпретация вышеприведенных положений состоит в следующем. Эволюция ледяного покрова характеризуется выборкой декадных наблюдений за период 1961–1989 гг. В настоящем случае экспериментами являются выполненные за отмеченный период в каждом районе расчетной карты акватории (см. рис. 2.1) 22 съемки декадных значений сплоченности, толщины и преобладающих размеров льдин. При этом съемки с 31-й по 36-ю декаду выполнялись за период 1961–1988 гг., а с 1-й по 16-ю декаду – за период 1961–1989 гг. В прибрежных районах (их общее число равно 51) съемки выполнялись отдельно как для припая, так и для льда, присутствующего в эту декаду в открытой части акватории района. Таким образом, рассматриваемая выборка формально насчитывает $(51+114) \cdot (29 \cdot 16 + 28 \cdot 6) = 104\,280$ – число экспериментальных наблюдений. Для статистического анализа использовалась фактическая выборка, в отдельных наблюдениях которой хотя бы один из параметров состояния покрова принимает ненулевые значение. Таких наблюдений оказалось 11 130. Для формирования распределения площадей различных толщин $y_{\mu g}$ необходимо выполнить ряд дополнительных построений, а именно – усреднить площади одной и той же толщины за многолетний период. Независимыми переменными модели $x_{\mu c}$ являются температура, скорость ветра и текущей день эволюции. Тогда удобные для проведения вычислений выражения принимают вид

$$\begin{aligned} \mu &= 6 \left\{ \sum_{r'=1}^{r-1} [d_1(r') - d_0(r')] + d - d_0(r) + r - 1 \right\} + g \\ f_{\mu}(\theta) &= 0,1 \sum_{d'=1}^{10} \sum_{j \in J_g} \hat{A}_{r,10(d-1)+d',j}(\theta) \\ e_{\mu}(\theta) &= A_{rdg}^{(D)} - f_{\mu}(\theta) \\ \Phi(\theta) &= e^T(\theta) e(\theta) \\ N_{\alpha\beta} &= 2 \sum_{\mu=1}^n (\partial f_{\mu} / \partial \theta_{\alpha}) (\partial f_{\mu} / \partial \theta_{\beta}) \\ \sigma^2(\theta) &= \Phi(\theta) / (n - 12) \\ V(\theta) &= 2\sigma^2(\theta) N^{-1} \end{aligned} \quad , \quad (4.1)$$

где $A_{rdg}^{(D)}$, $\sum_{j \in J_g} \hat{A}_{r,10(d-1)+d',j}$ – наблюдаемое среднедекадное распределение покрова и его модель; r – номер района акватории, $r = \overline{1,165}$; d – номер декады, $d = \overline{1,22}$; g – номер градации толщины, $g = \overline{1,6}$; J_g – совокупность номеров равномерных интервалов толщин, которые составляют g -ю градацию толщины.

Таким образом, для оценивания параметров использовалась выборка, в которой насчитывается $n = 21\,780$ наблюдений (число районов \times число декад \times число градаций толщины). Вектор искомых параметров $\theta = (\alpha_h, \alpha'_h, \alpha_a, \alpha'_a, \alpha_{ah}, \alpha_1, \alpha'_{ah}, T_B^*, T^*, D_{ah}, b_{ah}^{(0)}, b_{ah}^{(T)}, b_{ah}^{(h)})$ насчитывает $k = 12$ элементов.

В выражении для остатков учитывается независимость отдельных наблюдений, что обусловлено условиями проведения исходных съемок. Кроме того, районы прибрежной зоны имеют двух отдельных представителей – один для припая, а другой – для покрова открытого моря. При записи выражения для остатков учитывается еще тот факт, что отдельные члены правой части имеют один и тот же масштаб измерений.

При оценивании параметров могут понадобиться конкретные практические рекомендации относительно специфики выбора определенной вычислительной процедуры минимизации и вычисления частных производных, аппроксимация которых выполняется на основании конечных разностей. Ниже перечислены основные особенности решения подобных вопросов в настоящем исследовании. Отдельные методики их реализации рассматриваются в многочисленных публикациях по различным тематикам. Представляется, однако, что заслуживает особого внимания их подробное изложение в работах [81, 7, 11, 81, 55]. В них на примерах из различных областей приводится методология решения подобных задач.

Значения искомых параметров имеют различные диапазоны изменения. Так, порядок чисел T_B^* и T^* – первый десяток градусов Цельсия, а других параметров – сотые доли соответствующих масштабов. Поэтому для нахождения экстремума функционала $\Phi(\theta)$ целесообразно использование такого метода, где должным образом учитывается данная особенность. Подобными характеристиками обладает простой в численной реализации метод Марквардта. В численной реализации этого метода на его i -й итерации выбор вектора направления поиска \vec{v}_i определяется соотношением

$$\vec{v}_i = -[N(\theta_i) + \lambda_i C_i^2]^{-1} \vec{q}_i,$$

где λ_i – параметр метода (он определяется в процессе линейного поиска экстремума вдоль выбранного направления); C_i – вспомогательная диагональная матрица, которая вводится для учета различия масштабов искомых параметров. Значения элементов этой матрицы вычисляются на каждом шаге процедуры минимизации.

Согласно многочисленным экспериментам критерием останова вычислительной процедуры является условие

$$\rho \leq 10^{-2} \min_{\alpha} [(\theta_{i,\alpha} + 10^{-3})/v_{i,\alpha}], \quad (4.2)$$

где ρ – размер шага (скаляр). Другим критерием останова может служить условие превышения заранее заданного количества итераций. При аппроксимации

градиента с помощью конечных разностей обычно используются односторонние и центральные разности, где приращение аргумента $\delta\theta_\alpha$ целевой функции удовлетворяет условию

$$10^{-5} |\theta_\alpha| \leq |\delta\theta_\alpha| \leq 10^{-2} |\theta_\alpha|.$$

Вопрос о применении односторонних или центральных разностей решается в каждом случае отдельно. Рекомендуется использовать первый тип на нескольких итерациях до момента, пока не нарушится сходимость итерационного процесса. Если имеют место предпосылки ее возникновения, то следует перейти ко второму типу. В соответствующей вычислительной процедуре можно автоматически предусмотреть подобную ситуацию и выработать способы ее разрешения.

В рассматриваемом классе многоэкстремальных задач оценивания требуется задание начального приближения искомых параметров. Его успешный выбор способствует эффективному поиску нахождения экстремума и более быстрому сходимости к решению задачи поиска оптимума. При его поиске в значительной степени полагаются на априорные сведения о предмете изучения, выполнение определенных свойств решений математической модели и интуицию исследователя. Для нахождения начального приближения целесообразно использовать все доступные методы, вплоть до метода «грубой силы» [7]. И только в случае окончательной неудачи этой стратегии следует прибегать к более изощренным процедурам. Таким довольно часто применяемым на практике приемом решения многоэкстремальных задач является многоступенчатая оценка, или редукция первоначальной задачи в связанную цепочку менее сложных. Данный прием целесообразен еще и тем, что простейшие частные случаи способствуют детальному пониманию существа рассматриваемых проблем. Действенным способом также оказывается упрощенный метод оценивания, когда целевая функция заменяется относительно простым функционалом.

4.2. ОЦЕНКА НАЧАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ

Надлежащие рекомендации в полной мере применимы для построения начального приближения для параметров $\alpha_h, \alpha'_h, T_B^*, \alpha_{ah1} \equiv \alpha_{ah} a_1, \alpha_a, \alpha'_a, b_{ah}^{(0)}, b_{ah}^{(T)}$ и $b_{ah}^{(h)}$ на основании временного изменения средних толщин и полных площадей припая. В этом случае объектом изучения являются модель термической эволюции толщины (3.1) и модель эволюции общей площади припая. При этом на этапе формирования–зрелое состояние используется модель (3.24), а для этапа весеннего таяния и распада – ее модификация. Целесообразность их применения обусловлена тем, что для этих моделей отсутствует необходимость вычисления частных производных по пространственным и фазовым переменным исследуемой системы. Подобное обстоятельство существенным образом упрощает вычисление оценок для этих параметров эволюции ледяного покрова.

4.2.1. Модель термической эволюции толщины

Для оценивания начальных значений α_h, α'_h и T_B^* модели (3.1) следует предварительно исходные декадные гистограммы средних толщин припая трансформировать соответствующим образом в распределения толщин для каждого дня эволюции. Необходимо отметить, что в данной ситуации форма кривой конечного распределения интуитивно предсказуема – для большинства прибрежных районов акватории она имеет вид унимодальной кривой (см. рис. 2.10). Простые функциональные формы подобного изменения могут быть заданы, например, выражениями типа разложения по нормальным ядрам [92] или простой квадратичной зависимости от текущего времени эволюции:

$$h_r(t_{rB}, t) = h_{r,1} \exp[-h_{r,2}(t - t_{rB})^c], \quad (4.3a)$$

$$h_r(t) = \tilde{h}_{r,1} + \tilde{h}_{r,2}t + \tilde{h}_{r,3}t^2, \quad (4.3б)$$

где r – номер прибрежного района; t_{rB} – среднее первых дней начальной и конечной декад эволюции припая в r -м районе; t – текущее время; $h_{r,1}, h_{r,2}, \tilde{h}_{r,1}, \tilde{h}_{r,2}$ и $\tilde{h}_{r,3}$ – искомые коэффициенты; c – определяется методом перебора в процессе вычислений. Начальной точкой временного отсчета принят 310-й день текущего года, что является следствием методики проведения непосредственных наблюдений.

При заданных значениях t_{rB} и c логарифм от левой части в (4.3a) линеен относительно $\ln h_{r,1}$ и $h_{r,2}$. Поэтому для вычисления их значений можно использовать стандартный метод наименьших квадратов (МНК). В этом случае

$$h_{r,2} = \frac{\sum_{t=t0(r)}^{t1(r)} (Y_r(t) - \bar{Y}_r)(X_r(t) - \bar{X}_r) / \sum_{t=t0(r)}^{t1(r)} (X_r(t) - \bar{X}_r)^2},$$

$$h_{r,1} = \exp(\bar{Y}_r - h_{r,2} \bar{X}_r)$$

где $t0(r)$ – первый день декады, когда на акватории r -го района отмечается присутствие льда; $t1(r)$ – последний день декады присутствия льда на акватории; $Y_r(t) = \ln H_r([t/10] + 1)$, $H_r(d)$ – выборочные значения средних толщин припая в d -й декаде; $X_r(t) = (t - t_{rB})^c$. В этих соотношениях квадратные скобки – меньшее значение целой части аргумента, а знак черты – среднее значение величины за период присутствия льда.

Для нахождения коэффициентов представления (4.3б) требуется сформировать вектор зависимых переменных и соответствующую матрицу плана МНК. Элементы этого вектора определяются значениями средних толщин припая, а t -я строка – $(1, t, t^2)$. На основании этих массивов вычисляются $\tilde{h}_{r,1}, \tilde{h}_{r,2}$ и $\tilde{h}_{r,3}$.

Процедура оценки выполняется только для тех прибрежных районов, выборки которых содержат необходимое в плане достоверности результатов количество наблюдений. Общее число таких районов равно 4, а остальные не обеспечены необходимым для вычислений объемом наблюдений. Оказывается, что наибольшее соответствие между толщиной $h_r(t_{rB}, t)$ из представления (4.3а) и ее декадным прототипом достигается при значении $c = 4$. В этом случае коэффициент корреляции между ними для каждого из прибрежных районов изменяется в диапазоне 0,816–0,923, что показывает приемлемость этого представления в качестве аппроксимации декадных распределений толщин припая. Аналогичная ситуация отмечается и для (4.3б). Корреляция в этом случае несколько выше – от 0,869 до 0,964. Типичные кривые распределений средних толщин припая представлены на рис. 4.1.

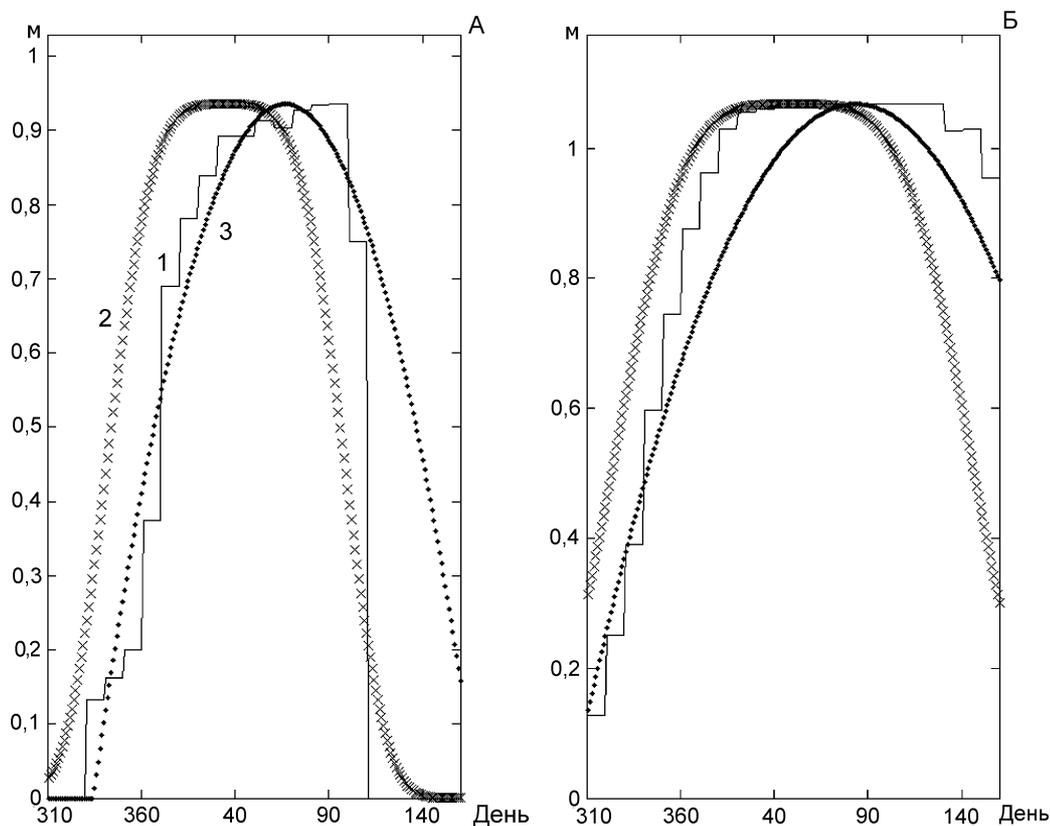


Рис. 4.1. Декадные распределения толщин припая в заливе Петра Великого (А) и в районе Татарского пролива (Б). 1 – гистограмма, 2 – (4.3а), 3 – (4.3б)

Выбор именно этих районов обусловлен их крайним положением на акватории моря, что способствует исследованию эволюции покрова в крайних ее положениях. При этом их припай заполняет основную часть их акватории, что по-

звolyет рассматривать эти районы как замкнутые акватории, в которых влияние льдов открытого моря не столь заметно (по крайней мере, на этапе оценки начальных приближений параметров). Поэтому покров в указанных районах является вычислительным полигоном для тестирования рассматриваемых здесь моделей.

Согласно аппроксимации (4.3а) для этапа формирования – зрелое состояние максимальная скорость прироста толщины припая для Японского моря составляет $2,265 \cdot 10^{-2}$ м/сут при среднем значении прироста $\bar{h} = 4,651 \cdot 10^{-3}$ м/сут и среднеквадратичном ее отклонении $\sigma(\dot{h}) = 6,876 \cdot 10^{-3}$ м/сут, а для (4.3.б) – $2,113 \cdot 10^{-2}$ м/сут, $\bar{h} = 7,818 \cdot 10^{-3}$ м/сут и $\sigma(\dot{h}) = 6,253 \cdot 10^{-3}$ м/сут. Для припая сопоставляемых районов эти величины принимают значения: для залива Петра Великого – $h_{8,1} = 0,788$, $h_{8,2} = 2,326 \cdot 10^{-7}$, $\max_t \dot{h}_8 = 2,645 \cdot 10^{-2}$ м/сут при $t = 58$ сут, $\bar{h}_8 = 7,909 \cdot 10^{-3}$ м/сут, $\sigma(\dot{h}_8) = 9,405 \cdot 10^{-3}$ м/сут; для района Татарского пролива – $h_{114,1} = 1,198$, $h_{114,2} = 2,998 \cdot 10^{-8}$, $\max_t \dot{h}_{114} = 2,122 \cdot 10^{-2}$ м/сут при $t = 44$ сут, $\bar{h}_{114} = 9,224 \cdot 10^{-3}$ м/сут, $\sigma(\dot{h}_{114}) = 7,539 \cdot 10^{-3}$ м/сут.

Необходимо отметить определенное совпадение оценок и большую, относительно средних значений, величину среднеквадратичных отклонений (в первом случае коэффициент вариации превышает 1, а во втором он близок к ней). Последнее обстоятельство явно указывает на непостоянство скорости прироста толщины и ошибочность использования ее среднего значения в качестве показателя динамики толщины, что свидетельствует о приемлемости подобных (3.1) моделей.

Приведенные в разд. 2.6 численные оценки T^* и T_B^* показывают, что основной диапазон их изменения определяется интервалом $[-5^\circ\text{C}, -10^\circ\text{C}]$ средних за декаду температур 10-метрового надводного слоя атмосферы. Поэтому при оценке α_h и α'_h температура T_B^* считается фиксированной. Тогда для их вычисления можно организовать следующую вычислительную процедуру. При фиксированной температуре T_B^* оценки искомых величин, согласно схеме МНК, определяются значениями выражений

$$\hat{\alpha}_h = \sum_r \sum_{t < t_{rB}} \dot{h}_r(t) X_r(t) / \sum_r \sum_{t < t_{rB}} X_r^2(t) \quad \text{и} \quad \hat{\alpha}'_h = \sum_r \sum_{t > t_{rB}} \dot{h}_r(t) X_r(t) / \sum_r \sum_{t > t_{rB}} X_r^2(t),$$

где $X_r(t) = (T_B^* - T_r(t))(H^* - h_r(t))h_r(t)$. В первом случае суммирование выполняется по районам и только для периода $t < t_{rB}$ формирования и зрелого состояния покрова, а во втором – по районам и для периода его весеннего таяния $t > t_{rB}$.

Далее с определенным шагом ΔT_B^* изменяется T_B^* , а затем вычисления повторяются. Критерий останова вычислительной процедуры – стабилизация значений оценок. При выполнении процедуры допускается комбинирование использования аппроксимаций: (4.3а) для оценивания α_h , (4.3б) – α'_h . Результаты использования этой процедуры приводят к оценкам в форме среднего значения величины и границ ее доверительного интервала:

$$\hat{\alpha}_h = (2,597 \pm 0,768) \cdot 10^{-3} \text{ (м} \cdot \text{°C} \cdot \text{сут)}^{-1}$$

$$\hat{\alpha}'_h = (8,243 \pm 2,151) \cdot 10^{-3} \text{ (м} \cdot \text{°C} \cdot \text{сут)}^{-1}$$

$$\hat{T}_B^* = -(6,9 \pm 1,5) \text{ °C}.$$

Границы доверительных интервалов величины определяются стандартным образом на основании ее среднего значения и среднеквадратичного отклонения, а также t – статистики распределения Стьюдента [9]. Чтобы не загромождать рассуждения излишними подробностями, в дальнейшем единицы измерений оценок параметров опускаются. Поэтому далее приводятся именно численные значения оценок параметров.

Приемлемость этих оценок в качестве достаточно близких начальных приближений истинных значений α_h и α'_h обусловлена значимой корреляцией между модельным представлением толщины (3.1) и его наблюдаемым прототипом. Так, коэффициент корреляции между вектором, который представляет собой совокупность наборов модельных толщин льда в выбранных районах, и вектором их наблюдаемых значений равен 0,682. Кроме того, вычисленные начальные приближения имеют узкие рамки своих доверительных интервалов. Здесь оценки вычисляются на основании объединенной выборки наблюдений для отдельных районов, что позволяет увеличить объем выборки. Подобные действия приводят к увеличению статистической состоятельности и статистической эффективности искомых оценок. В дальнейшем эти значения уточняются при оценке всей совокупности параметров системы на основании общей выборки наблюдений.

4.2.2. Модель эволюции общей площади припая

Для оценки параметров этой модели следует выполнить аналогичную предыдущему рассмотрению процедуру аппроксимации декадных гистограмм площадей припая и площадей льда открытого моря для каждого дня эволюции покрова. Поскольку вычисления показывают практически полное совпадение обоих представлений для исходных декадных распределений (коэффициенты корреляции между различными формами аппроксимаций превышают 0,984), то используется только форма (4.3а):

$$A_r^{(B)}(t_{rB}, t) = a_{r,1}^{(B)} \exp[-a_{r,2}^{(B)}(t - t_{rB})^c]$$

$$A_r(t_{rB}, t) = a_{r,1} \exp[-a_{r,2}(t - t_{rB})^c]$$

где r – номер прибрежного района; t_{rB} – среднее первых дней начальной и конечной декад эволюции припая в r -м районе; t – текущее время; $A(t)$ – общая площадь льда на акватории прибрежного района, выраженная в единицах площади района открытого моря (площади прибрежных районов меньше 1); $a_{r,1}^{(B)}, a_{r,2}^{(B)}, a_{r,1}$ и $a_{r,2}$ – искомые коэффициенты; c – определяется методом перебора в процессе вычислений. Понятно, что значение t_{rB} совпадает с соответствующей величиной из (4.3а). Вычисления показывают аналогичное совпадение и для коэффициента c . По сравнению с (4.3б) представление декадных распределений общих площадей припая в виде нормальных ядер предпочтительней, поскольку оно отражает существо процесса: в начальный и конечный моменты эволюции припая кривая площадей касается оси времени (рис. 4.2). Методика их оценки такая же, как и при рассмотрении динамики средних толщин припая.

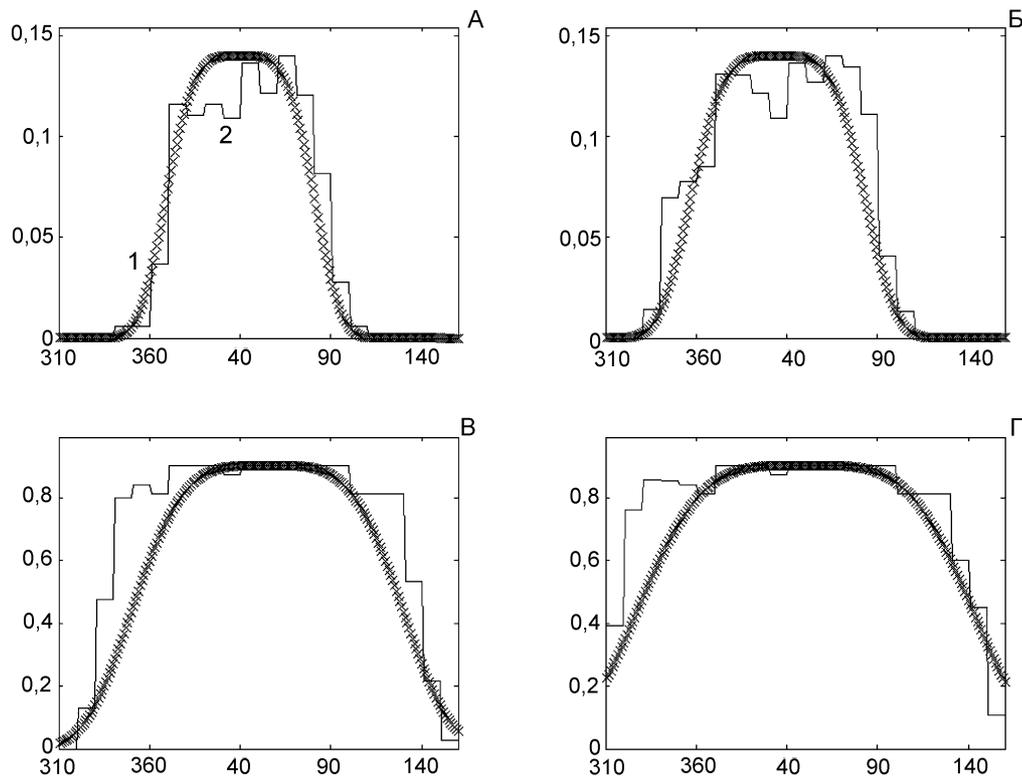


Рис. 4.2. Аппроксимации декадных распределений площади припая и общей площади льда в заливе Петра Великого (А, Б) и районе Татарского пролива (В, Г). 1 – гистограмма, 2 – (4.3а)

Согласно результатам аппроксимации максимальная относительная скорость прироста площади припая $\max_r \dot{A}_r^{(B)} / A_r^*$ для Японского моря составляет 2,881 % площади в сутки. Среди районов, выборки которых содержат достаточный для вычислений объем, эта скорость отмечается в районе залива Петра Великого на 37-е сутки начала отсчета времени, а коэффициенты аппроксимации и элементарные статистики для выборки принимают значения: $a_{8,1}^{(B)} = 0,533$ площади в сутки, $a_{8,2}^{(B)} = 1,106 \cdot 10^{-7}$, $\bar{A}_8^{(B)} = 1,168$ % площади в сутки, $\sigma(\dot{A}_8^{(B)}) = 1,033$ % площади в сутки и коэффициент вариации 0,855. В районе Татарского пролива эти величины принимают значения: $\max_t \dot{A}_{114}^{(B)}(t) / A_{114}^* = 1,875$ % площади в сутки достигается на 29-е сутки; $a_{114,1}^{(B)} = 1,015$, $a_{114,2}^{(B)} = 9,831 \cdot 10^{-9}$, $\bar{A}_{114}^{(B)} = 0,945$ % площади в сутки, $\sigma(\dot{A}_{114}^{(B)}) = 0,668$ % площади в сутки и коэффициент вариации 0,707. Сопоставление коэффициентов вариаций указывает на более плавный характер эволюции площади припая в Татарском проливе, нежели в заливе Петра Великого. Наличие временного запаздывания между изменением толщины и площади следует из сравнения времен перехода соответствующих кривых через точку их перегиба: для залива Петра Великого толщина имеет точку перегиба на 58-е сутки ее эволюции, а площадь – на 37-е сутки; для района Татарского пролива эти времена принимают значения 44 и 29 суток. В первом случае величина запаздывания составляет 21 сутки, а во втором – 15 суток.

Рассматриваемая модель описывается уравнением (3.24) и соответствующим условием равенства нулю потоков на крайних границах диапазона толщин. Если выполнить его интегрирование по всему интервалу толщин, то для этапа формирование–зрелое состояние покрова припая получается уравнение (3.14). В терминах общей площади припая $A_r^{(B)}$ и площади льда в открытой части r -го прибрежного района $A_r^{(S)}$ оно принимает вид

$$\dot{A}_r^{(B)} = (T_B^* - T_r)(A_r^* - A_r)(\alpha_{ah} a_1 + \alpha_a A_r^{(B)}),$$

где $A_r = A_r^{(S)} + A_r^{(B)}$ – общая площадь покрова в прибрежном районе. Это уравнение насчитывает два линейных параметра: $\alpha_{ah1} \equiv \alpha_{ah} a_1$ и α_a (параметр T_B^* полагается фиксированным). Для их оценки можно воспользоваться его эквивалентной формой записи

$$Y_r(t_{ri}) = \alpha_{ah1} + \alpha_a X_r(t_{ri}),$$

где i – номер наблюдения для периода формирования и зрелого состояния покрова; $Y_r(t_{ri}) = \dot{A}_r^{(B)}(t_{ri}) / [(T_B^* - T(t_{ri}))(A_r^* - A(t_{ri}))]$; t_{ri} – текущий день эволюции покрова в r -м районе (изменяется от начального дня первой декады присутствия

льда на акватории до t_{rB}); $X_r(t_{ri}) = A_r^{(B)}(t_{ri})$. Тогда значения искомым оценок определяются соотношениями

$$\alpha_a = \sum_r [(\sum_{t < t_{rB}} Y_r(t) - \bar{Y})(\sum_{t < t_{rB}} X_r(t) - \bar{X})] / \sum_r \sum_{t < t_{rB}} (X_r(t) - \bar{X})^2 \text{ и } \alpha_{ah1} = \bar{Y} - \alpha_a \bar{X},$$

где N – совокупное число наблюдений из выборок отдельных районов, объемы которых удовлетворяют выбранным условиям их использования; $\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_r \sum_{t < t_{rB}} Y_r(t)$; $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_r \sum_{t < t_{rB}} X_r(t)$. Непосредственные вычисления приводят к оценкам численных значений параметров

$$\hat{\alpha}_a = (2,693 \pm 0,659) \cdot 10^{-2},$$

$$\hat{\alpha}_{ah1} = (3,257 \pm 0,581) \cdot 10^{-3}.$$

Размерность первой величины обратна произведению размерностей $[A]$ и температуры, а второй – размерности температуры.

Эволюция общей площади припая на этапе его весеннего таяния и распада определяется следующей модификацией уравнения (3.23):

$$\dot{A}^{(B)} = \alpha'_a (T_B^* - T)(A^* - A^{(S)} - A^{(B)})A^{(B)} + \alpha'_{ah} (T_B^* - T)A_1^{(B)} - b_{ah}(T, \bar{h}^{(B)})A^{(B)},$$

где $A_1^{(B)}$ – площадь тонкого льда припая; $b_{ah}(T, h)$ – определяется соотношением из (3.16), характеризует интенсивность распада для единицы площади припая с толщиной h ; $\bar{h}^{(B)}$ – средняя толщина припая. Поскольку в исходной выборке отсутствуют наблюдения временного распределения $A_1^{(B)}$, то параметр α'_{ah} можно оценить только косвенным образом на стадии поиска экстремума функционала из (4.1). Данное обстоятельство, а также последующие вычисления показывают несущественную роль второго члена в правой части. Поэтому на этом этапе оценивания им можно пренебречь. Тогда для нахождения искомым значений параметров используется достаточно близкое приближение последнего уравнения

$$\dot{A}^{(B)} / A^{(B)} = \alpha'_a (T_B^* - T)(A^* - A^{(S)} - A^{(B)}) - b_{ah}^{(0)} - b_{ah}^{(T)}(T_B^* - T) + b_{ah}^{(h)} \bar{h}^{(B)} / H^*.$$

Чтобы воспользоваться стандартной вычислительной схемой МНК, следует преобразовать его к матричному виду

$$Y_{r,i} = -b_{ah}^{(0)} X_{r,i}^{(1)} + \alpha'_a X_{r,i}^{(2)} - b_{ah}^{(T)} X_{r,i}^{(3)} + b_{ah}^{(h)} X_{r,i}^{(4)},$$

где элементы матрицы Y являются ненулевыми значениями относительных скоростей изменения площадей припая в отдельных прибрежных районах $\dot{A}_r^{(B)}(t_{r,i})/A_r^*$; $X_{r,i}^{(1)} = 1$; $X_{r,i}^{(2)} = [T_B^* - T_r(t_{r,i})][A_r^* - A_r^{(S)}(t_{r,i}) - A_r^{(B)}(t_{r,i})]$; $X_{r,i}^{(3)} = [T_B^* - T_r(t_{r,i})]$; $X_{r,i}^{(4)} = \bar{h}^{(B)}(t_{r,i})/H^*$. При этом учитываются только те наблюдения, для которых $t_{r,i} > t_{r,B}$. Как и в предыдущих случаях, увеличение количества наблюдений способствует повышению статистической состоятельности и статистической эффективности первоначальных оценок. Результаты применения вычислительной процедуры приводят к значениям

$$\begin{aligned}\alpha'_a &= (5,138 \pm 1,164) \cdot 10^{-3}, \\ b_{ah}^{(0)} &= (6,310 \pm 8,471) \cdot 10^{-7}, \\ b_{ah}^{(T)} &= (9,694 \pm 3,543) \cdot 10^{-3}, \\ b_{ah}^{(h)} &= (2,056 \pm 0,982) \cdot 10^{-3}.\end{aligned}$$

Приемлемость этих оценок в качестве начального приближения можно оценить на основании определенной меры близости между результатами моделирования и наблюдаемым распределением общих площадей припая, например коэффициента корреляции между ними. В данном случае он равен 0,808, что свидетельствует о достаточно приемлемой степени адекватности модельного представления.

4.3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ

На основании результатов предыдущих параграфов получены начальные оценки 9 из 12 искомым начальных значений параметров. Начальное приближение для $T^* = -7,5^\circ\text{C}$ известно из литературных источников [79]. Начальное значение для коэффициента диффузии D_{ah} выбираем из соображений его размерности. По своему физическому смыслу она (размерность) имеет размерность квадрата приращения толщины, деленную на размерность времени. В рассматриваемой ситуации $\Delta h = 0,15$ м, поэтому начальное значение коэффициента диффузии полагается равным $2,25 \cdot 10^{-2}$ м²/сутки. Начальное значение α'_{ah} задавалось равным $\alpha_{ah} a_1$. Таким образом, определены начальные значения для всех элементов искомого вектора параметров $\theta = (\alpha_h, \alpha'_h, \alpha_a, \alpha'_a, \alpha_{ah} a_1, \alpha'_{ah}, T_B^*, T^*, D_{ah}, b_{ah}^{(0)}, b_{ah}^{(T)}, b_{ah}^{(h)})$. Далее выполняется процедура поиска минимума функционала из соотношений (4.1).

Критерием останова вычислительной процедуры является динамическое условие минимальности шага (4.2). На первых пробных ее шагах целесообразно использование ограничения на число итераций вычисления функционала. Допускается также использование и других условий останова. Результаты приводят к следующим оценкам значений параметров:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_h &= (2,842 \pm 0,209) \cdot 10^{-3} \text{ и } \hat{\alpha}'_h = (8,051 \pm 1,137) \cdot 10^{-3}; \\ \hat{\alpha}_a &= (2,486 \pm 0,175) \cdot 10^{-2} \text{ и } \hat{\alpha}'_a = (5,980 \pm 0,186) \cdot 10^{-2}; \\ \alpha_{ah} \alpha_1 &= (1,843 \pm 0,162) \cdot 10^{-3} \text{ и } \hat{\alpha}'_{ah} = (1,473 \pm 0,125) \cdot 10^{-3}; \\ \hat{T}_B^* &= -6,3 \pm 0,8 \text{ и } \hat{T}^* = -7,6 \pm 0,9; \\ \hat{D}_{ah} &= (1,310 \pm 0,021) \cdot 10^{-3}; \\ \hat{b}_{ah}^{(0)} &= (6,324 \pm 6,431) \cdot 10^{-7}, \hat{b}_{ah}^{(T)} = (8,740 \pm 1,096) \cdot 10^{-3} \text{ и } \hat{b}_{ah}^{(h)} = (2,185 \pm 0,046) \cdot 10^{-3}.\end{aligned}$$

Кроме того, варьирование значениями параметров в (1.7) показало, что в смысле минимума функционала и результатов математического моделирования наиболее приемлемыми оценками являются: $P_0 = 5 \cdot 10^7$ г/с², $S_0 = 0,7$ и $\kappa = 3$.

Анализ выборочных коэффициентов корреляции показывает высокую значимую корреляцию (0,913) между оценками $b_{ah}^{(0)}$ и $b_{ah}^{(T)}$. Данный факт означает, что при изменении $b_{ah}^{(T)}$ происходит соответствующее изменение $b_{ah}^{(0)}$, а это свидетельствует о параметрической вырожденности модели. Поэтому в дальнейшем свободный член для функции $b_{ah}(t, h)$ опускается из рассмотрения. Значения остальных коэффициентов не превышают 0,344. Поэтому можно сделать вывод о независимости параметров. После исключения $b_{ah}^{(0)}$ параметры модели были пересчитаны заново. Оказывается, что значение $\Phi(\hat{\theta})$ равно 19,724 при его ненулевом значении и 19,722 в противном случае. Таким образом, значение функционала практически не изменяется.

Анализ значений оценок параметров как показателей значимостей отдельных составляющих процесса эволюции показывает справедливость принятых при построении моделей допущений. Согласно результатам вычислений мера интенсивности процессов весеннего таяния и разрушения существенно превосходит соответствующую меру для процесса формирования–зрелое состояние покрова. При этом вклад в эволюцию покрова диффузионного процесса, при котором происходит выравнивание площадей различных толщин, не столь заметный. Узкие границы доверительных интервалов свидетельствуют также о достаточно высокой степени надежности их определения.

4.4. ОЦЕНКА АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

Процедура оценки адекватности модели насчитывает ряд этапов, которые выполняются в определенной последовательности. В первую очередь необходимо выяснить, насколько верны представления о структуре информационных потоков в системе. Если эти представления соответствуют реальности, то требуется также указание границ применимости модели для различных частных ситуаций. Действенным способом оценки адекватности является изучение статистических свойств искомых параметров. В рассматриваемом здесь случае узкие границы доверительных интервалов свидетельствуют об их значимом отличии от нуля. Особый интерес представляет рассмотрение их статистической состоятельности или решение вопросов, насколько изменяются значения оценок, когда они вычисляются на основании отдельных частей исходной выборки. Если имеет место существенное изменение значений, то эти оценки не имеют практического смысла, поскольку увеличение объема исходных наблюдений не будет приближать к истинному значению. Поэтому свойство состоятельности должно проверяться в первую очередь [2].

Для исследования состоятельности оценок исходная выборка разбивается на отдельные совокупности наблюдений, и далее выполняется оценка параметров на основании каждой части. Затем полученные результаты сравниваются между собой. В настоящем случае выборка разбита на приблизительно равные по объему наблюдений две части: одна часть содержит наблюдения за период 1961 по 1975 г., а другая – с 1976 по 1989 г. В качестве начальных значений выступает один и тот же фиксированный набор. Результаты приведены в табл. 3. Анализ ее элементов показывает, что оценки параметров при разбиении выборки меняются незначительно. Данное обстоятельство можно интерпретировать как факт статистической состоятельности вычисленных оценок. При этом границы доверительных интервалов оцениваемых параметров для отдельных выборок исходной совокупности данных существенно выше, поскольку при усреднении величин их дисперсии снижаются.

Тестирование работоспособности модели и один из способов оценки ее адекватности целесообразно выполнить на основании принятого в практике исследования ледяного покрова соотношения [57, 29]

$$P = \frac{m}{n} 100 \% ,$$

где m – число оправдавшихся прогнозов; n – общее число прогнозов, которое можно оценить при наличии фактического материала. Чтобы воспользоваться этой метрикой близости для сопоставления площадей льда в прибрежных районах, следует площади льда перевести в соответствующие сплоченности льда (относительных площадей льда). Для этого надо площадь льда поделить на площадь данного района. Результаты этого тестирования приведены в табл. 4.

Оценка статистической состоятельности параметров

	1961–1976 гг.	1977–1989 гг.	1961–1989 гг.
$\Phi(\hat{\theta})$	26,339	25,465	19,724
$\alpha_h \cdot 10^3$	$3,016 \pm 0,473$	$2,731 \pm 0,484$	$2,842 \pm 0,209$
$\alpha'_h \cdot 10^3$	$8,962 \pm 2,626$	$7,488 \pm 2,510$	$8,051 \pm 1,137$
$\alpha_a \cdot 10^2$	$2,336 \pm 0,315$	$2,401 \pm 0,287$	$2,486 \pm 0,175$
$\alpha'_a \cdot 10^2$	$5,811 \pm 0,283$	$5,997 \pm 0,301$	$5,980 \pm 0,186$
$\alpha_{ah} a_1 \cdot 10^3$	$1,769 \pm 0,374$	$1,926 \pm 0,418$	$1,843 \pm 0,162$
$\alpha'_{ah} \cdot 10^3$	$1,215 \pm 0,410$	$1,384 \pm 0,376$	$1,148 \pm 0,125$
T_B^*	$-7,1 \pm 1,4$	$-6,8 \pm 1,3$	$-6,3 \pm 0,8$
T^*	$-7,7 \pm 1,6$	$-7,8 \pm 1,4$	$-7,6 \pm 0,9$
$D_{ah} \cdot 10^3$	$1,440 \pm 0,156$	$1,299 \pm 0,183$	$1,310 \pm 0,021$
$b_{ah}^{(T)} \cdot 10^3$	$7,231 \pm 2,168$	$9,785 \pm 2,003$	$8,740 \pm 1,096$
$b_{ah}^{(h)} \cdot 10^3$	$1,989 \pm 0,226$	$2,246 \pm 0,209$	$2,185 \pm 0,046$

Примечание. После знака «±» следует среднеквадратичное отклонение параметра.

При построении табл. 4 использовались наблюдения за всеми 114 районами расчетной области, из которых в 51 районе имеется еще и припай. Для каждого декадного наблюдения отдельного района вычислялась выбранная метрика при допустимой погрешности прогнозов ± 1 балл, а затем значения суммировались. Анализ таблицы показывает: модель эволюции площадей припая в большей степени, чем модель эволюции площадей открытого моря, соответствует исходным распределениям. Объяснением этого обстоятельства является специфичность припая как природного объекта – он более устойчив для различного рода внешних воздействий, что обусловлено физической средой его непосредственного расположения.

Особое значение в оценке адекватности модели выполняет сопоставление выборочных распределений в отдельных районах моря и соответствующих результатов численного моделирования. На рис. 4.3 представлены частные случаи такого сопоставления для общей площади и средних толщин льда на акватории. Анализ его различных случаев показывает хорошую степень соответствия исходных и модельных распределений площадей покрова. Для каждого из них коэффициенты корреляций между наблюдаемыми и модельными динамическими переменными определяются значениями: 0,933 (рис. 4.3, А), 0,945 (Б), 0,872 (В), 0,884 (Г). Необходимо отметить, что между модельными распределениями для залива Петра Великого и Татарского пролива имеется определенная доля несо-

Таблица 4

Оценка достоверности численных прогнозов сплоченности Р, %

Декада	1987 г.			1988 г.			1989 г.			Среднее		
	S_S	S_B	S									
31	72	100	86	68	91	80	56	92	74	65	94	80
32	51	70	61	56	92	74	62	81	72	56	81	69
33	64	76	70	62	84	73	70	79	75	65	80	73
34	66	82	74	70	86	78	72	81	77	69	83	76
35	75	86	81	75	83	79	65	78	72	72	82	77
36	73	88	81	81	87	84	87	94	91	80	90	85
1	76	82	79	77	81	79	75	82	79	76	82	79
2	66	73	70	71	74	73	81	76	79	73	74	74
3	68	75	72	72	75	74	72	74	73	71	75	73
4	72	76	74	77	73	75	69	82	76	73	79	76
5	75	80	78	73	78	76	71	80	76	73	79	76
6	74	73	74	70	73	72	70	75	73	71	74	73
7	77	86	82	75	80	78	75	76	76	76	81	78
8	81	88	85	82	71	77	82	82	82	82	80	81
9	79	82	81	74	78	76	70	76	73	74	79	77
10	74	92	83	85	90	88	72	87	80	77	90	83
11	82	96	89	93	78	86	89	86	88	88	87	87
12	79	76	78	78	89	84	81	79	80	79	81	80
13	80	69	75	81	79	80	88	78	83	83	75	79
14	76	90	83	75	84	80	74	82	78	75	85	80
15	87	84	86	82	83	83	78	86	82	82	84	83
16	93	100	97	79	91	85	89	90	90	87	94	90
Среднее	79	87	83	79	87	83	79	86	82	79	86	83

Примечание. S_S – сплоченность льда открытого моря, S_B – сплоченность припая, S – общая сплоченность района.

ответствия в начальный период эволюции. Поскольку в модели максимальная толщина задавалась равной 1,5 м, то имеет место превышение толщин. Дальнейшее рассмотрение случаев отдельных районов также позволяет выявить подобные особенности. Однако оценку адекватности модели и границы ее применимости следует выполнить для всей совокупности выборочных распределений в отдельных районах.

Границы применимости разработанных моделей непосредственно следуют из анализа рис. 4.4, где представлены карты плотности значений корреляций между выборочными и модельными распределениями в отдельных районах моря. Случай А соответствует ситуации, в которой построение карты плотности

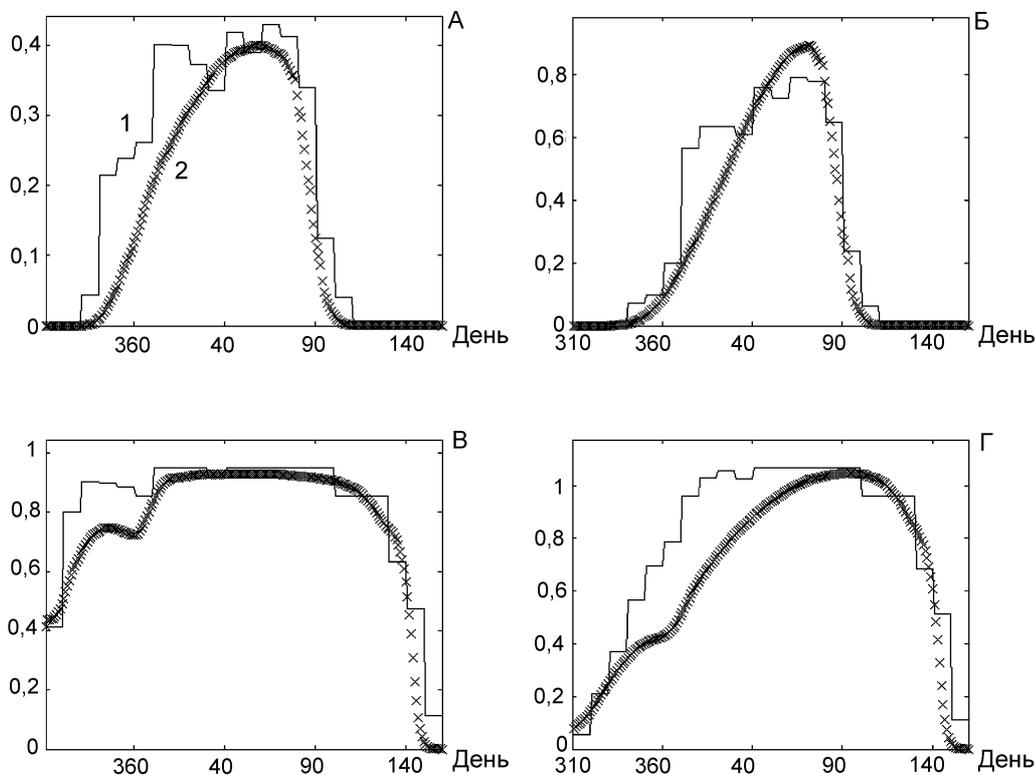


Рис. 4.3. Наблюдаемые (1) и модельные (2) распределения общих площадей льда и средних толщин в заливе Петра Великого (А, Б) и в районе Татарского пролива (В, Г)

выполняется на основании коэффициентов корреляции между выборочными распределениями общих площадей льда и модельными распределениями, а случай Б – средних толщин.

Маркировка областей на рис. 4.4 соответствует трем градациям значений коэффициента корреляции. Так, области, где отмечается наибольшее соответствие (корреляция r от 1 до 0,8), помечены цифрой 3; если r изменяется от 0,6 до 0,8, то области отмечены 2; цифрой 1 помечены области, где r ниже этих значений. Анализ этих случаев указывает на более высокое соответствие между средними модельных распределений площадей и их выборочными значениями, нежели для толщин покрова. Данная ситуация следует из того, что вариабельность толщин существенно выше вариабельности площадей (см. рис. 2.8). Действительно, в период уже стабильного состояния площадей покрова все еще имеет место изменение его толщин. А разрушение толщи начинается ранее заметного разрушения площадей.

Выявленное хорошее соответствие указывает на отсутствие каких-либо причин для неприемлемости исследуемой модели на основании используемой выборки данных. В действительности никакое количество данных никогда не

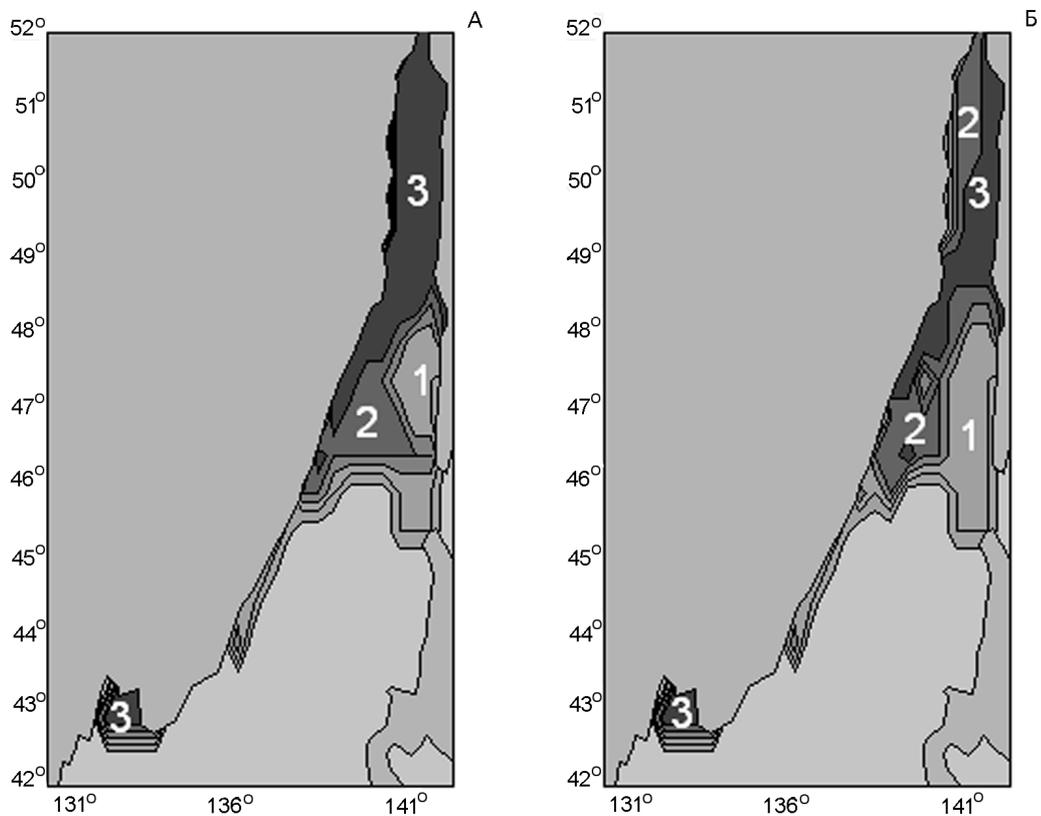


Рис. 4.4. Карты плотности значений корреляций между исходными и модельными распределениями (А – площади, Б – толщины). Пояснения см. в тексте

может доказать правильность модели: наибольшее, на что можно положиться, – эти данные не опровергают модель. Весь вопрос тогда заключается в том, насколько привлеченная для исследований выборка отражает реальное состояние процессов. В настоящем рассмотрении представленные численные расчеты и эвристические доказательства основаны на многолетнем фактурном материале. Выполненный статистический анализ показывает, что он на самом деле является статистически представительным. Поэтому в данном случае не опровергается допущение о приемлемости предлагаемой модели и ее адекватности процессам эволюции площадей льда.

4.5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Вычислительные эксперименты условно подразделяются на два типа. Первые из них ориентированы на установление адекватности моделей. Основное предназначение экспериментов второго класса заключается в оценке различного

рода прогнозов долгосрочных изменений, которые могут вызываться естественными или искусственными обстоятельствами. Поскольку установлена адекватность модели, то ее можно использовать для проведения различного рода прогностических экспериментов, в частности направленных на изучение последствий воздействия на ледяной покров Японского моря возможных изменений температуры атмосферы.

При современном темпе выброса в атмосферу диоксида углерода CO_2 антропогенного происхождения вероятность таких изменений достаточно высока. Весьма вероятное потепление температуры обусловлено существованием так называемого парникового эффекта Земли: коротковолновое излучение Солнца нагревает Землю, а ее излучение лежит в области более длинных волн. Поэтому увеличение количества CO_2 значительно ограничивает выход собственного излучения Земли в космос и способствует повышению температуры. Так, согласно приведенным в [75] результатам математического моделирования системы «атмосфера–океан» при удвоении концентрации CO_2 в атмосфере ее современная средняя температура повысится с $-19,2^\circ\text{C}$ до $-17,54^\circ\text{C}$. При этом уровень атмосферных осадков увеличится с 2,04 до 2,15 мм/сутки.

Интерес к данной проблеме очевиден по многим обстоятельствам. Прежде всего, для проведения экологических экспертиз требуются различного

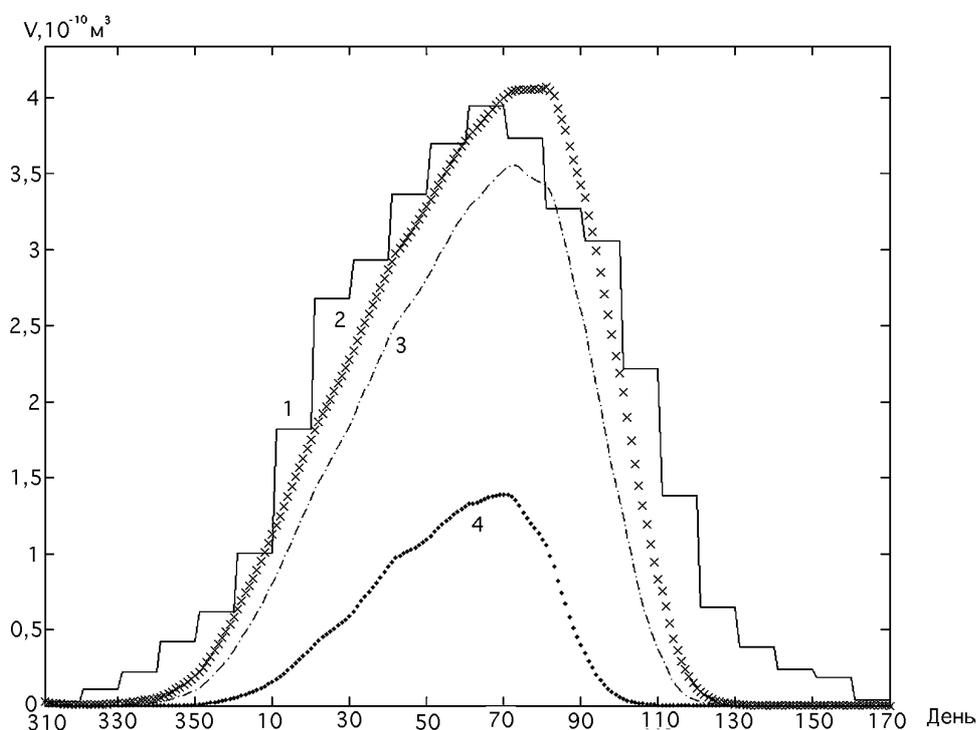


Рис. 4.5. Динамика объемов льда Японского моря при изменении температуры. 1 – выборка, 2 – модель, 3 – 1°C , 4 – 5°C

рода количественные оценки антропогенного воздействия промышленных и производственных предприятий на окружающую среду. Кроме того, эти прогнозы полезны для комплексной оценки возможного состояния климатической системы.

Расчеты выполнялись при том же ветровом режиме 2-метрового надледного слоя воздуха, что и был использован для оценки адекватности модели. В качестве вектора параметров модели выступали его оценки. Температура атмосферы изменялась в сторону ее увеличения с шагом $0,5^{\circ}\text{C}$. Результаты расчетов в форме графиков изменения общих объемов льда приведены на рис. 4.5. Масштаб измерений объемов льда 10^{10} м^3 .

Согласно этим результатам при повышении температуры на 1°C общие потери объемов льда составляют $8,682 \cdot 10^{11}\text{ м}^3$, а при повышении на 5°C – $2,856 \cdot 10^{12}\text{ м}^3$. Чтобы реально представить порядок этих огромных чисел, стоит перевести их в площадь открытого района моря. Следуя этому, в первом случае суммарные потери составляют ледяной покров 249 таких районов, толщина льда в которых равна 1 м; во втором случае эта цифра соответствует покрову с площадью 826 районов.

Понятно, что полученные результаты дают грубое представление о возможных последствиях климатических изменений. Ведь при глобальном потеплении увеличивается уровень осадков, вследствие чего изменяется солевой режим моря, а следовательно, и условия, и температура атмосферы, при которой первоначально формируется покров. Кроме того, возможны не учитываемые в модели обстоятельства. Однако даже на данном уровне представлений может быть выполнена оценка этих последствий.

4.6. ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Система соотношений (3.22)–(3.24) при допущении о квазистационарном дрейфе ледяного покрова представляет собой основу для сравнительно легко реализуемой вычислительной процедуры численного моделирования эволюции покрова. В рассматриваемых здесь случаях численное моделирование ориентировано на решение двух самостоятельных задач:

- параметрической идентификации модели эволюции ледяного покрова;
- прогноз будущего состояния ледяного покрова при заданном температурном и ветровом режимах надводного слоя атмосферы.

В первой ситуации в качестве вектора искомым параметров выступает вектор $\theta = (\alpha_h, \alpha'_h, \alpha_a, \alpha'_a, \alpha_{ah}, a_1, \alpha'_{ah}, T_B^*, T^*, D_{ah}, b_{ah}^{(0)}, b_{ah}^{(T)}, b_{ah}^{(h)})$. В рамках модели могут быть введены определенные модификации соотношений между динамическими переменными модели, в частности изменение вида функции дробления. Однако следует иметь в виду, что различного рода усложнения должны быть оправданными и соответствовать достоверности задания исходных данных. Более того,

одно из требований к модели заключается в максимально возможной простоте формального представления. Данное обстоятельство является особенно важным для проведения многочисленных вычислительных экспериментов, где временные и компьютерные ресурсы играют существенную роль в выборе определенной математической модели и организации вычислений.

Поскольку конфигурация области расчетов рис. 2.1 представляет собой форму вытянутого треугольника, то организацию процедуры вычислений целесообразно выполнить исходя из линейного представления области, а именно – пространственно-временные распределения площадей в отдельных районах акватории упакованы в четырехмерный массив. Один из его индексов соответствует номеру района, два других – пространственно-временной локализации, а последний – номеру градации толщины покрова. Тогда пространственно-временное распределение температуры характеризуется двумерным массивом, а набор скоростей ветра – трехмерным массивом. При заданном компьютерном образе карты расчетной области подобный способ вычислений способствует экономному использованию вычислительных ресурсов компьютера и позволяет значительно понизить время вычислений.

В соответствии с указанным и удобством доступа в интерактивном режиме к различным переменным в программной реализации присутствует переменная типа `global` системы Matlab 6.5, элементами которой являются динамические массивы структур. Для графического представления результатов использовались средства дескриптивной и высокоуровневой графики этой системы, а программная реализация процедуры минимизации (4.2) была выполнена на основании программы безусловной минимизации `fminunc`.

ВЫВОДЫ

Результаты выполненных исследований показывают следующее.

1. Приемлемость разработанной методики оценки параметров для модели эволюции ледяного покрова. На основании разработанной методики получены результаты, которые имеют самостоятельное значение и могут быть использованы в дальнейших исследованиях. В частности, сведения о показателях скорости прироста толщины и скорости прироста единицы площади способствуют дальнейшему развитию рассмотрения покрова как динамической системы.

2. Сопоставление исходных и модельных распределений по различным критериям их соответствия указывает на адекватность модели эволюции ледяного покрова.

3. Разработана методика оценки прогноза состояния ледяного покрова Японского моря при изменении температурного и ветрового режимов надледного слоя воздуха.

4. Выполнена оценка состояния ледяного покрова Японского моря при возможном глобальном изменении климата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе мы попытались изложить наши представления о специфике проявления процессов самоорганизации в системе, которая является результатом адаптации масс морской воды к воздействию атмосферы [89, 101, 102]. Чтобы детально разобраться в этой проблеме, требуется определить наиболее приемлемую для рассматриваемых процессов аналогию, в терминах и определениях которой они, т. е. процессы, имели бы простую и естественную интерпретацию. Нам представляется, что в наибольшей степени подобными свойствами обладает сообщество биологических видов в среде, где активно проявляет себя некоторый лимитирующий фактор [72, 78]. В этом случае имеет место дифференциация представителей сообщества по их определенным характеристикам [98, 103]. При этом конечный результат воздействия известен заранее – система имеет, по существу, один устойчивый стационарный узел. И какими бы ни были ее стартовые значения, система при увеличении интенсивности воздействия фактора попадает туда за конечное время. Интерес представляет как раз изучение самого переходного процесса и особенностей его протекания.

Для ледяного покрова, как «сообщества» взаимодействующих между собой частиц льда, процессы самоорганизации активно проявляются на первичных этапах образования зародышей льда и их последующего роста, агрегации в отдельные образования и в дальнейшем при самопроизвольном дроблении льдин. Действительно, при появлении частиц льда и их последующем росте они «конкурируют» между собой за исходный пространственный ресурс – площадь акватории. Кроме того, агрегация льдин в терминах процесса рождения–гибели является собой образование крупных частиц и выбывание из системы мелких частиц [105]. А самопроизвольное дробление есть случай, когда крупные частицы порождают более мелкие. При этом имеет место нарушение симметрии, когда указанные процессы не являются обратимыми: агрегация определяется одними, а дробление – другими законами.

Интерес к ледяному покрову как модельной системе обусловлен еще и тем, что здесь явно проявляются два разных режима эволюции. Так, реализация первого из них, дивергентного этапа эволюции, приводит к повышению разнообразия форм представителей системы. И его присутствие обуславливает поиск новых возможностей существования. На втором, так называемом конвергентном, этапе разнообразие уменьшается, но система наилучшим образом адаптируется к внешним условиям.

Обобщенные в данной монографии результаты исследований могут быть использованы:

- для оценки состояния и прогноза погоды в районах, где учитывается присутствие ледяного покрова;
- для дальнейших разработок методик прогноза гидрометеорологических, и прежде всего ледовых, условий;
- для развития современной системы научно-оперативного гидрометеорологического обеспечения хозяйственных мероприятий Дальнего Востока;
- для оценки разномасштабной изменчивости и прогноза ледовых условий на акватории замерзающих морей;
- для подготовки специалистов гидрометеорологических и мореходных специальностей;
- для планирования морских операций на акватории Японского моря в холодный период года.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абузяров З.К.* и др. Морские прогнозы. – Л.: Гидрометеиздат, 1988. – 319 с.
2. *Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика. Исследование зависимостей. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 487 с.
3. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей / В.Н. Вапник, Т.Г. Глазкова, В.А. Кощев, А.И. Михальский, А.Я. Червоненкис. – М.: Наука, 1984. – 815 с.
4. *Александров В.В., Горский Н.Д., Поляков А.О.* Рекурсивные алгоритмы обработки и представления данных: препр. ЛНИИВЦ АН СССР, 1979. – 53 с.
5. *Александров В.В., Горский Н.Д.* Алгоритмы и программы структурного метода обработки данных. – Л.: Наука, 1983. – 208 с.
6. *Аппель И.Л., Гудкович З.М.* Численное моделирование и прогноз эволюции ледяного покрова арктических морей в период таяния. – СПб.: Гидрометеиздат, 1992. – 144 с.
7. *Бард Й.* Нелинейное оценивание параметров. – М.: Статистика, 1979. – 349 с.
8. *Бендат Дж., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
9. *Болч Б., Хуань К.Дж.* Многомерные статистические методы для экономики. – М.: Статистика, 1979. – 317 с.
10. *Будько М.И.* Полярный лед и климат // Изв. АН СССР. Сер. геогр. – 1956. – № 6. – С. 3–10.
11. *Ватутин В.А., Телевинова Т.М., Чистяков В.П.* Вероятностные методы в физических исследованиях. – М.: Наука, 1985. – 208 с.
12. *Веселов В.В., Гонтов Д.П., Пустыльников Л.М.* Вариационный подход к задачам интерполяции физических полей. – М.: Наука, 1983. – 119 с.
13. *Воеводин В.А., Колесов С.А., Кулаков И.Ю., Тимохов Л.А.* Методика краткосрочного численного прогноза сжатия и перераспределения льда // Тр. ААНИИ. – 1981. – Т. 384. – С. 28–33.
14. *Волков Н.А., Слепцов-Шевлевич Б.А.* О цикличности в колебаниях ледовитости арктических морей // Тр. ААНИИ. – 1971. – Т. 303. – С. 5–35.
15. *Волощук В.М., Седунов Ю.С.* Процессы коагуляции в дисперсных системах. – Л.: Гидрометеиздат, 1975. – 320 с.
16. *Волощук В.М.* Кинетическая теория коагуляции. – Л.: Гидрометеиздат, 1984. – 283 с.
17. *Гайдышев И.* Анализ и обработка данных: специальный справочник. – СПб.: Питер, 2001. – 752 с.
18. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986. – 528 с.
19. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана: В 2 т. – М.: Мир, 1986. Т. 1. – 396 с.
20. *Гудкович З.М., Мелконян Г.И., Никифоров Е.Г.* Аэродинамические исследования морских льдин // Тр. ААНИИ. – 1963. – Т. 253. – С. 219–231.
21. *Доронин Ю.П.* Тепловое воздействие атмосферы и гидросферы в Арктике. – Л.: Гидрометеиздат, 1969. – 298 с.
22. *Доронин Ю.П.* К методике расчета сплоченности и дрейфа льда // Тр. ААНИИ. – 1970. – Т. 291. – С. 5–7.
23. *Доронин Ю.П., Хейсин Д.Е.* Морской лед. – Л.: Гидрометеиздат, 1975. – 318 с.

-
24. *Дрогайцев В.А.* Зоны сжатия и разрежения льда в поле атмосферного давления. // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1956. – № 11. С. 133–137.
 25. *Дэйвисон М.* Многомерное шкалирование: Методы наглядного представления данных. – М.: Финансы и статистика, 1988. – 254 с.
 26. *Жуховицкий А.А., Шварцман Л.А.* Физическая химия. – М.: Металлургия, 1968. – 520 с.
 27. *Захаров В.Ф.* К особенности проявления атмосферных циклов в ледовитости // Тр. ААНИИ. – 1971. – Т. 303. – С. 55–60.
 28. *Зиновьева М.М., Белик Т.А.* К вопросу о ветровом дрейфе льдов // Тр. ААНИИ. – 1959. – Т. 226. – С. 136–141.
 29. *Зубакин Г.К.* Крупномасштабная изменчивость состояния ледяного покрова морей северо-европейского бассейна. – Л.: Гидрометеоздат, 1987. – 160 с.
 30. *Зубакин Г.К.* Расчет параметров дрейфа льда гренландского моря // Тр. ААНИИ. – 1990. – Т. 420. – С. 1050–1115.
 31. *Зубов Н.Н.* Максимальная толщина морского и наземного льда // Метеорология и гидрология. – 1959. – № 2. – С. 22–27.
 32. *Зуев А.Н.* Численная модель для расчета скорости дрейфа и перераспределения льда в море // Тр. ААНИИ. – 1983. – Т. 385. – С. 19–26.
 33. *Ивахненко А.Г.* Долгосрочное прогнозирование и управление сложными объектами. – Киев: Техника, 1975. – 312 с.
 34. *Ивченко В.О., Хейсин Д.Е.* Определение внутренних напряжений в ледяном покрове, возникающих при дрейфе льда // Проблемы Арктики и Антарктики. – 1974. – Вып. 43. – С. 84–89.
 35. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
 36. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 325 с.
 37. *Кендалл М. Дж., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи. – М.: Наука, 1973. – 890 с.
 38. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. – М.: Наука, 1982. – 608 с.
 39. *Ковалев Е.Г., Николаев Ю.А.* Применение дискриминантного анализа для долгосрочного прогноза ледовитости арктических морей // Тр. ААНИИ. – 1976. – Т. 32. – С. 3–26.
 40. *Колмогоров А.Н.* Теории вероятностей и математическая статистика: [сб. статей]. – М.: Наука, 1986. – 535 с.
 41. *Комов Н.И.* Структура льда и образование проталин // Тр. ААНИИ. – 1981. – Т. 363. – С. 151–157.
 42. *Лайхтман Д.Л.* Нелинейная теория ветрового дрейфа льдов // Изв. АН СССР. Сер. физ. и атмосферы океана. – 1968. – Т. 4, № 11. – С. 1220–1223.
 43. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Физическая кинетика. – М.: Изд-во физ.-мат.лит., 2001. – 536 с.
 44. *Лодиз Р., Паркер Р.* Рост монокристаллов. – М.: Мир, 1974. – 540 с.
 45. *Лушников А.А., Пискунов В.Н.* Коагуляция в присутствии внешних источников // ДАН СССР. 1976. – Т. 231. – С. 1403–1406.
 46. *Лушников А.А., Пискунов В.Н.* Формирование стационарных распределений в коагулирующих системах с распадающимися частицами // Коллоид. ж. 1977. – № 5. – С. 857–862.

-
47. *Максимов И.В., Сарухунян Э.И., Смирнов Н.П.* Космогеофизический фон макропроцессов в океане и атмосфере и сверхдолгосрочный прогноз. – Л.: Гидрометеоздат, 1977.
 48. *Марпл.-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
 49. *Масловский М.И.* Математическое моделирование короткопериодного ветрового дрейфа и перераспределения морского льда различной сплоченности (на примере Южного океана) // Тр. ААНИИ. – 1982. – Т. 387. – С. 116–136.
 50. *Масловский М.И.* Особенности неустановившегося ветрового дрейфа морского льда // Тр. ААНИИ. – 1982. – Т. 387. – С. 136–148.
 51. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 608 с.
 52. Международная символика для морских ледовых карт и номенклатура морских льдов. – Л.: Гидрометеоздат, 1984. – 56 с.
 53. Методы анализа данных: Подход, основанный на методе динамических сгущений / Кол. авт. под рук. Э. Дидэ; под ред. и с предисл. С.А. Айвазяна и В.М. Бухштабера. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 367 с.
 54. *Миронов Е.У.* О возможности прогноза аномалии ледовитости Денисова пролива с большой заблаговременностью // Тр. ААНИИ. – 1981. – Т. 372. – С. 63–68.
 55. *Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д.* Численные методы. Использование MATLAB. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 720 с.
 56. *Надежина Е.Д., Стернзат А.В.* Тепло- и влагообмен над неоднородной поверхностью морского льда // Метеорология и гидрология – 1996. – № 2. – С. 54–62.
 57. Наставление по службе прогнозов. Раздел 3, ч. 3. – Л.: Гидрометеоздат, 1982. – 144 с.
 58. *Никифоров Е.Г.* Об изменении сплоченности ледяного покрова в связи с его динамикой // Пробл. Арктики. – 1957. – Вып. 2. – С. 59–71.
 59. *Овсиенко С.Н.* О численном моделировании дрейфа льда // Изв. АН СССР. Сер. физ. атмосферы и океана. – 1976. – Вып. 12, № 11. – С. 1201–120.
 60. *Овсиенко С.Н., Эфроимсон В.О.* О граничных условиях в моделях динамико-термического перераспределения ледяного покрова // Исследования ледяного покрова северо-западных морей. – М.: Наука, 1983. – С. 20–22.
 61. *Оран Э., Борис Дж.* Численное моделирование реагирующих потоков. – М.: Мир, 1990. – 660 с.
 62. *Перри А.Х., Уокер Дж.М.* Система океан–атмосфера. – Л.: Гидрометеоздат, 1979. – 195 с.
 63. *Пестряков В.М.* Определение параметров Вейбулла для длинных образцов оптических волокон // Заводская лаборатория. – 2003. – № 1. – С. 50–52.
 64. *Питербарг Л.И.* Динамика и прогноз крупномасштабных аномалий температуры поверхности океана. – Л.: Гидрометеоздат, 1989. – 199 с.
 65. *Плотников В.В.* Изменчивость ледовых условий дальневосточных морей России и их прогноз. – Владивосток: Дальнаука, 2002. – 172 с.
 66. *Полак Л.С., Гольденберг М.Я., Левицкий А.А.* Вычислительные методы в химической кинетике. – М.: Наука, 1984. – 280 с.
 67. *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
 68. *Пригожин И., Конденуди Д.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. – М.: Мир, 2002. – 461 с.
 69. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. – М.: Едиториал: УРСС, 2003. – 312 с.

-
70. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применения. – М.: Наука, 1968. – 547 с.
 71. Родионов В.Н. Очерки по геомеханике. – М.: Науч. мир, 1996. – 64 с.
 72. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. – М.: Наука, – 1984. – 304 с.
 73. Рузин М.И. О ветровом дрейфе льда в поле неоднородного давления // Тр. ААНИИ. – 1959. – Т. 226. – С. 123–135.
 74. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 2001. – 608 с.
 75. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд., испр. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2002. – 320 с.
 76. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
 77. Свирижев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
 78. Седунов Ю.С. Физика образования жидкокапельной фазы в атмосфере. – Л.: Гидрометеоздат, 1972. – 207 с.
 79. Сергин В.Я., Сергин С.Я. Системный анализ проблемы больших колебаний климата и оледенения Земли. – Л.: Гидрометеоздат, 1978. – 279 с.
 80. Стромберг А.Г., Семченко Д.П. Физическая химия – М.: Высш. школа, 1988. – 496 с.
 81. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах (информационно-статистические алгоритмы). – М.: Наука, 1978. – 240 с.
 82. Суховой В.Ф. Восстановление полей гидрологических элементов по экспедиционным наблюдениям // Мор. гидрофиз. исслед. – 1971. – № 3. – С. 91–116.
 83. Терехина А.Ю. Методы многомерного шкалирования визуализация данных: (обзор) // Автоматика и телемеханика. – 1973. – № 7. – С. 80–94.
 84. Тимохов Л.А. Дрейф и изменение структуры ледяного покрова как двухфазной системы лед–вода // Тр. ААНИИ. – 1979. – Т. 364. – С. 110–120.
 85. Тимохов Л.А., Хейсин Д.Е. Динамика морских льдов (математические модели). – Л.: Гидрометеоздат, 1987. – 272 с.
 86. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские модели. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.
 87. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
 88. Тузинкевич А.В., Четырбоцкий А.Н. Модель сезонной динамики взаимодействующих видов // Математическое моделирование в популяционной биологии. – Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1985. – С. 84–101.
 89. Федоров К.Н., Гинзбург А.И. Приповерхностный слой океана. – Л.: Гидрометеоздат, 1988. – 303 с.
 90. Философский энциклопедический словарь / гл. редакция: Л.Ф. Ильичев, П.Н. Федосеев, С.М. Ковалев, В.Г. Панов. – М.: Сов. энциклопедия, 1983. – 840 с.
 91. Фролов И.Е. Численная модель осенне-зимних явлений // Тр. ААНИИ. – 1981. – Т. 372. – С. 73–81.
 92. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. – М.: Наука, 1979. – 368 с.
 93. Хакен Г. Синергетика: Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – М.: Мир, 1985. – 423 с.
 94. Харлоу Ф.Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – С. 316–342.

-
95. *Хастингс Н., Пикок Дж.* Справочник по статистическим распределениям. – М.: Статистика, 1980. – 95 с.
 96. *Хейсин Д.Е.* О модификации метода *МАС* для расчета перераспределения льда при дрейфе // Тр. ААНИИ. – 1981. – Т. 372. – С. 82–89.
 97. *Хиблер III У.Д.* Нарастание, дрейф и разрушение морских льдов // Динамика масс снега и льда. – Л.: Гидрометеиздат, 1985. – С. 153–217.
 98. *Четырбоцкий А.Н., Кафанов А.И., Жуков В.Н.* Сезонная динамика видового обилия сообществ бухты Витязь (Японское море): анализ и моделирование // Тез. докл. Второй всесоюз. науч. конф. по морской биологии. – 17–19 сент. 1982 г. – Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1982. – С. 73–73.
 99. *Четырбоцкий А.Н.* Методы и алгоритмы решения задач снижения размерности пространства описания. – Владивосток, 1991. – 95 с.
 100. *Четырбоцкий А.Н.* Пакет прикладных программ для решения задач снижения размерности пространства описания // Управляющие системы и машины. – Киев: Наук. думка, 1991. – Т. 1(111). – С. 103–106.
 101. *Четырбоцкий А.Н.* Идентификация моделей вертикального распределения плотности океанских водных масс // Информатика и моделирование в океанологических исследованиях. – Владивосток: Дальнаука, 1999. – С. 131–143.
 102. *Четырбоцкий А.Н.* Локальная эволюция толщины ледяного покрова водных поверхностей // Тр. ТОВМИ. – Владивосток, 2001. – Вып. 23. – С. 117–123.
 103. *Четырбоцкий А.Н.* Геохимический процесс минералообразования как динамика системы типа «ресурс – потребитель» // Исследовано в России: электр. журн. – <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/114.pdf>.
 104. *Четырбоцкий А.Н., Плотников В.В.* Ледяной покров Японского моря : исходные данные и процедуры восстановления пропущенных значений // Исследовано в России: электр. журн. – <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/007.pdf>.
 105. *Четырбоцкий А.Н., Лукьянчук И.В., Руднев В.С.* Кинетика островкового роста анодно-искровых покрытий // Журн. физ. химии. – 2004. – Т. 78, № 3. – С. 536–539.
 106. *Четырбоцкий А.Н., Маркевич П.В.* Микроэлементы в песчаных отложениях Сихотэ-Алиня и Корьякско-Камчатской области // Количественные параметры природной среды в плейстоцене. – Владивосток: ДВО РАН, 1988. – С. 136–185.
 107. *Чупрынин В.И.* Разрывные автоколебания в геофизических системах. – М.: Наука, 1985. – 93 с.
 108. *Шалыгин А.С., Палагин Ю.И.* Прикладные методы статистического моделирования. – Л.: Машиностроение, 1986. – 320 с.
 109. *Шемендюк Г.П., Бабцев В.А., Четырбоцкий А.Н.* Статистическое исследование износов наружной обшивки корпусов судна ледового плавания // Техническая эксплуатация флота. № 23(763). – М.: Судостроение, 1991. – С. 1–23.
 110. *Шулейкин В.В.* Физика моря. – М.: Наука, 1968. – 1085 с.
 111. *Эбеллинг В., Энгель А., Файстель Р.* Физика процессов эволюции. – М.: Эдиториал: УРСС, 2001. – 328 с.
 112. *Эрнст М.* Кинетика образования кластеров при необратимой агрегации // Фракталы в физике. – М.: Мир, 1988. – С. 399–429.
 113. *Якунин Л.П.* Ледовые исследования на дальневосточных морях // Проблемы Арктики и Антарктики. – 1979. – Вып. 77. – С. 102–107.

-
114. Якунин Л.П. Количество льда и затраты тепла на его таяние в дальневосточных морях // Пробл. Арктики и Антарктики. – 1986. – Вып. 62. – С. 93–96.
 115. Chetyrbotsky A.N. Parametrical model for vertical distribution of water mass density // Proceeding of the Pasific Asia offshore mech. Symposium. – Pusan, Korea, october 31 – november 2. – 1996. – P. 33–36.
 116. Chetyrbotsky A.N. Statistical estimations(rate) of arguments of models thickness of an ice reinforced overlying state // Abstract the 15 – th Intern. Symposium On Ochotsk Sea & Sea Ice «The 2 – nd Ice Scour & Arctic Marine Pipelines workshop», 6–10 February. – 2000. – Mombetsu, Hokkaido, Japan.
 117. Chetyrbotsky A.N. Evolution of dimensional sizes of ice formations // Abstract the 15 – th Intern.Symposium On Ochotsk Sea & Sea Ice «The 2 – nd Ice Scour & Arctic Marine Pipelines workshop», 6–10 February 2000. – Mombetsu, Hokkaido, Japan.
 118. Chetyrbotsky A.N. Local evolution of thickness of an ice cover of water tables. // The ACSYS Decade and Beyond, 11–14 November 2003. – St. Peterburg. – P. 160–161.
 119. Daun Cristensen S.T. The representation of the surface pressure field in a two – dimensional hydrodinamic numaric model for the North Sea, the Scagerrac and the Kattegat // Dt. hydrogr. Z. 1975. – No. 3. – P. 97–116.
 120. Hasse L. On the surface to geostrophic wind relation ship at the sea and the stability dependence law // Beitr. Phys.Atmosph. – 1974. – No. 47. – P. 45–63.
 121. Hibler III W.D., Bryan K.A. A diagnostic ice-ocean model // J. Phys. Ocean. 1978. – Vol. 17. – P. 987–1015.
 122. Hibler III W.D. A dynamic – thermodynamic sea ice model // J. Phys. Ocean. – 1979. – Vol. 9. – P. 815–846.
 123. Hibler III W.D. Modeling a variable thickness sea ice cover // Month. -Weather Rev. – 1980. – Vol. 108. – P. 1943–1973.
 124. Langleben M.P. A study of roughness parameters of sea ice from wind profiles // J. Gephys. Res. 1972. – Vol. 77, No. 77. – P. 5935–5944.
 125. McPhee M.G. The effect of the oceanic boundary layer on the mean drift pack ice application of a simple model // J. Phys. Ocean. – 1979. – Vol. 9, No 2. – P. 388–400.
 126. McPhee M.G., Smith J.D. Measurements of the turbulent boundary layer under [pack ice // J. Phys. Ocean. 1976. – Vol. 6, No. 5. – P. 696–711.
 127. Rothrock D.A. The mechanical behavior of pack ice // Annual Review of Earth Planetary Sciences. 1975. – No. 3. – P. 317–342.
 128. Rothrock D.A. The steady drift of an incompressible arctic ice cover // J. Geophys. Res. – 1975. – Vol. 80. – P. 387–397.
 129. Semtner A.J. A model for the thermodynamics growth of sea ice in numerical investigations of climate // J. Phys. Ocean. – 1976. – Vol. 6. – P. 379–389.
 130. Thorndike A.S. et al. The thickness distribution of sea ice // J. Geophys. Res. – 1975. – Vol. 80, No. 33. – P. 4501–4513.
 131. Thorndike A.S., Colony R. Sea ice motion in response to geostrophic winds// J. Geophys. Res. – 1982. – Vol. 87. – P. 5845–5852.
 132. Young F.W., Cliff N. Interactive Scaling With Individual Subjects // Psychometrika. – 1972. Vol. 37. – P. 385–415.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Математические модели формирования, дрейфа и разрушения ледяного покрова замерзающих морей	7
1.1. Термическое формирование и разрушение толщины покрова	8
1.2. Дрейф морского льда	11
1.3. Эволюция площадей и толщин ледяного покрова	17
1.4. Численные методы исследования дрейфа льда	25
Выводы	28
Глава 2. Статистический анализ параметров состояния ледяного покрова Японского моря	30
2.1. Количественное описание параметров состояния ледяного покрова.....	31
2.2. Динамика ледовитости Японского моря	39
2.3. Статистические распределения метрических параметров состояния ледяного покрова	45
2.4. Ледяной покров залива Петра Великого, района Татарского пролива и района пролива Лаперуза.....	60
2.5. Припай ледяного покрова Японского моря	62
2.6. Температурный и ветровой режимы надледного слоя воздуха	64
Выводы	69
Глава 3. Синергетика ледяного покрова замерзающих морей.....	71
3.1. Термическая эволюция толщины ледяного покрова	72
3.2. Кинетика эволюции ледяного покрова.....	77
3.3. Эволюция припая Японского моря.....	104
3.4. Распределение площадей льда по толщине на акватории Японского моря.....	108
Выводы	111
Глава 4. Оценка адекватности модели и прогноз состояния ледяного покрова Японского моря	113
4.1. Стратегия оценки параметров	114
4.2. Оценка начальных приближений параметров	118
4.3. Результаты вычислительной процедуры оценки параметров	126
4.4. Оценка адекватности модели	128
4.5. Вычислительные эксперименты	132
4.6. Организация вычислительного процесса численного моделирования ...	134
Выводы	135
Заключение	136
Литература	138

CONTENTS

Preface.....	5
Chapter 1. Mathematical models of formation, drift and destruction of an ice cover of the freezing seas	7
1.1. Thermal formation and destruction of thickness of a cover.....	8
1.2. Drift of sea ice.....	11
1.3. Evolution of the areas and thickness of an ice cover	17
1.4. Numerical methods of research of drift of ice	25
Conclusions.....	28
Chapter 2. The statistical analysis of parameters of a condition of Japan' sea ice cover	30
2.1. Quantitative description of parameters of a condition of an ice cover.....	31
2.2. Dynamics ice cover and volumes of Japan sea water area.....	39
2.3. Statistical distributions of metric parameters of a condition ice cover	45
2.4. Ice cover of Peter the Great Bay, area of Tatar strait and area of La Perouse strait	60
2.5. Cover of fast ice for Japan sea	62
2.6. Temperature and wind modes overice a layer of air.....	64
Conclusions.....	69
Chapter 3. Synergetics of an ice cover of the freezing seas	71
3.1. Thermal evolution of thickness of an ice cover	72
3.2. Kinetics evolutions of an ice cover	77
3.3. Evolution припая sea of Japan	104
3.4. Distribution of the areas of ice on thickness on water area of sea of Japan	108
Conclusions.....	111
Chapter 4. Estimating adequacy of model and the forecast of a condition of an ice cover Sea of Japan	113
4.1. Strategy for appraisement parameters.....	114
4.2. An estimation initial approaches parameters	118
4.3. Results of computing procedure of an estimation of parameters.....	126
4.4. An estimation of adequacy of model	128
4.5. Computing experiments	132
4.6. Organization of calculating process of a numerical modelling.....	134
Conclusions.....	135
Conclusion.....	136
References.....	138

Научное издание

Александр Наумович Четырбоцкий
Владимир Викторович Плотников

ЛЕДЯНОЙ ПОКРОВ ЯПОНСКОГО МОРЯ:
АНАЛИЗ ДАННЫХ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Редактор *О.В. Глазунова*
Художник *А.М. Савельева*
Технический редактор *В.М. Мошкина*
Оператор набора *Е.Ю. Бородина*
Оператор верстки *О.Ю. Полянская*
Корректор *Н.В. Давыденко*

Изд. лиц. ИД № 05497 от 01.08.2001 г. Подписано к печати 22.06.2005 г.
Гарнитура «Таймс». Бумага офсетная. Формат 70×100/16. Печать офсетная.
Усл. п. л. 11,86. Уч.-изд.л. 10,4. Тираж 250 экз. Заказ 107

Отпечатано в типографии ФГУП Издательство «Дальнаука» ДВО РАН
690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7